PLAN WYNIKOWY

Przedmiotowy system oceniania z matematyki. Technikum zakres rozszerzony.

Wstęp

Plan wynikowy kształcenia matematycznego jest dostosowany do programu nauczania matematyki w liceach i technikach – zakres podstawowy i rozszerzony, autorstwa Marcina Kurczaba, Elżbiety Kurczab i Elżbiety Świdy, zamieszczonego na stronie internetowej www.pazdro.com.pl wiosną 2012 roku. Jest on przeznaczony dla nauczycieli oraz uczniów pracujących z podręcznikiem „Matematyka. Podręcznik do liceów i techników. Zakres podstawowy i rozszerzony" – numer ewidencyjny w wykazie podręczników: 563/1/2012 oraz zbiorami zadań do matematyki, autorstwa Elżbiety Kurczab, Marcina Kurczaba i Elżbiety Świdy, wydanymi przez Oficynę Edukacyjną * Krzysztof Pazdro.

Plan jest wykazem wiadomości i umiejętności, jakie powinien mieć uczeń ubiegający się o określone oceny na poszczególnych etapach edukacji w liceum lub w technikum.

Wymagania stawiane przed uczniem podzieliliśmy na trzy grupy:

- Wymagania podstawowe (zawierają wymagania konieczne);
- Wymagania dopełniające (zawierają wymagania rozszerzające);
- Wymagania wykraczające.

Wymagania wykraczające zawierają w sobie wymagania dopełniające, te zaś zawierają wymagania podstawowe.

Ocenę dopuszczającą powinien otrzymać uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące 40–60% wymagań podstawowych, zaś ocenę dostateczną uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące powyżej 60 % wymagań podstawowych.

Ocenę dobrą powinien otrzymać uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące do 75% wymagań dopełniających, zaś ocenę bardzo dobrą uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące powyżej 75% wymagań dopełniających.

Ocenę celującą powinien uzyskać uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności zawarte w wymaganiach wykraczających.

Tematy, które mogą nie być realizowane w zakresie podstawowym, zostały oznaczone symbolem **(R)**.

Aby ułatwić nauczycielom, uczniom i ich rodzicom korzystanie z planu wynikowego, dla poszczególnych wymagań przedstawiamy przykładowe zadania, które dokładniej określają stopień trudności problemów wymaganych na poszczególne oceny. Przedstawione zadania **nie mogą** w żadnym wypadku stanowić przykładowego zbioru zadań, z którego nauczyciel powinien czerpać zadania na ewentualny egzamin sprawdzający, lecz mają jedynie wskazać stopień trudności zadań na poszczególne oceny.

Plan wynikowy nie może być „dokumentem sztywnym". Zakładamy, że każdy nauczyciel zmodyfikuje ten plan, dostosowując go zarówno do liczby godzin przeznaczonych na realizację materiału, jak i do możliwości uczniów.

Autorzy

1. Wprowadzenie do matematyki. Pojęcia podstawowe

Tematyka zajęć:

- Zdanie. Zaprzeczenie zdania
- Koniunkcja zdań. Alternatywa zdań
- Implikacja. Równoważność zdań. Definicja. Twierdzenie
- Prawa logiczne. Prawa De Morgana
- Zbiór. Działania na zbiorach
- Zbiory liczbowe. Oś liczbowa
- Rozwiązywanie prostych równań
- Przedziały
- Rozwiązywanie prostych nierówności
- Zdanie z kwantyfikatorem

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi odróżnić zdanie logiczne od innej wypowiedzi; – umie określić wartość logiczną zdania prostego; – potrafi zanegować zdanie proste i określić wartość logiczną zdania zanegowanego; – potrafi rozpoznać zdania w postaci koniunkcji, alternatywy, implikacji i równoważności zdań; – potrafi zbudować zdania złożone w postaci koniunkcji, alternatywy, implikacji i równoważności zdań z danych zdań prostych; – potrafi określić wartości logiczne zdań złożonych, takich jak koniunkcja, alternatywa, implikacja i równoważność zdań; – potrafi odróżnić definicję od twierdzenia; – zna prawa De Morgana (prawo negacji alternatywy oraz prawo negacji koniunkcji)	Uczeń: – potrafi budować zdania złożone i oceniać ich wartości logiczne; – potrafi wnioskować o wartościach zdań składowych wybranych zdań złożonych na podstawie informacji o wartościach logicznych zdań złożonych; – zna prawo negacji implikacji i potrafi je stosować w praktyce; – potrafi , na podstawie implikacji prostej, utworzyć implikację odwrotną, przeciwną oraz przeciwstawną; – wie, że równoważne są implikacje: prosta i przeciwstawna oraz odwrotna i przeciwna; – potrafi negować zdania złożone; – rozumie budowę twierdzenia matematycznego; potrafi wskazać jego założenie i tezę; – potrafi zbudować twierdzenie odwrotne do	Uczeń: – potrafi stosować wiadomości z logiki do wnioskowania matematycznego; – potrafi stosować działania na zbiorach do wnioskowania na temat własności tych zbiorów; – potrafi określić dziedzinę i zbiór elementów spełniających równanie z jedną niewiadomą, zawierające wyrażenia wymierne lub pierwiastek stopnia drugiego.

i potrafi je stosować; – potrafi określić wartość logiczną zdania, które jest negacją koniunkcji, oraz zdania, które jest negacją alternatywy zdań prostych; – zna takie pojęcia, jak: zbiór pusty, zbiory równe, podzbiór zbioru; – zna symbolikę matematyczną dotyczącą zbiorów ($\in$, $\notin$, $\cup$, $\cap$, $-$, $\subset$, $\not\subset$); – potrafi podać przykłady zbiorów (w tym przykłady zbiorów skończonych oraz nieskończonych); – potrafi określić relację pomiędzy elementem i zbiorem; – potrafi określać relacje pomiędzy zbiorami (równość zbiorów, zawieranie się zbiorów, rozłączność zbiorów); – zna definicję sumy, iloczynu, różnicy zbiorów; – potrafi wyznaczać sumę, iloczyn i różnicę zbiorów skończonych; – potrafi wyznaczyć sumę, różnicę oraz część wspólną podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych: ***N***, ***C***, ***NW***, ***W***; – potrafi rozróżniać liczby naturalne, całkowite, wymierne, niewymierne; – potrafi przedstawić liczbę wymierną w postaci ułamka zwykłego i w postaci rozwinięcia dziesiętnego; – umie zamienić ułamek o rozwinięciu dziesiętnym nieskończonym okresowym na ułamek zwykły; – potrafi zaznaczać liczby wymierne na osi liczbowej; – rozumie pojęcie przedziału, rozpoznaje przedziały ograniczone i nieograniczone;	danego oraz ocenić prawdziwość twierdzenia prostego i odwrotnego; – potrafi sprawnie posługiwać się symboliką matematyczną dotyczącą zbiorów; – potrafi podać przykłady zbiorów A i B, jeśli dana jest suma $A \cup B$, iloczyn $A \cap B$ albo różnica $A - B$; – zna pojęcie dopełnienia zbioru i potrafi zastosować je w działaniach na zbiorach; – potrafi wyznaczyć dopełnienie przedziału lub dopełnienie zbioru liczbowego skończonego w przestrzeni ***R***; – potrafi przeprowadzić proste dowody, w tym dowody „nie wprost”, dotyczące własności liczb rzeczywistych; – potrafi oceniać wartości logiczne zdań, w których występują zależności pomiędzy podzbiorami zbioru ***R***; – potrafi wyznaczyć dziedzinę równania z jedną niewiadomą, w przypadku, gdy trzeba rozwiązać koniunkcję warunków; – potrafi podać przykład równania sprzecznego oraz równania tożsamościowego; – potrafi wskazać przykład nierówności sprzecznej oraz nierówności tożsamościowej; – rozumie zwrot „dla każdego *x* ....” oraz „istnieje takie *x*, że ....” i potrafi stosować te zwroty w budowaniu zdań logicznych; – potrafi zapisać symbolicznie zadnie z kwantyfikatorem; – potrafi ocenić wartość logiczną zdania z kwantyfikatorem; – zna prawa De Morgana dla zdań z kwantyfikatorem;	

– potrafi zapisać za pomocą przedziałów zbiory opisane nierównościami; – potrafi zaznaczyć na osi liczbowej podany przedział liczbowy; – potrafi wyznaczyć sumę, różnicę oraz część wspólną przedziałów; – wie , co to jest równanie (nierówność) z jedną niewiadomą; – potrafi określić dziedzinę równania; – zna definicję rozwiązania równania (nierówności) z jedną niewiadomą; – wie, jakie równanie nazywamy równaniem sprzecznym, a jakie równaniem tożsamościowym; – wie, jaką nierówność nazywamy sprzeczną, a jaką nierównością tożsamościową.	– potrafi zanegować zdanie z kwantyfikatorem i podać wartość logiczną zdania po negacji.	

Przykładowe zadania

Zadanie 1. Wśród poniższych wypowiedzi znajdują się zdania logiczne. Wskaż je. Oceń wartości logiczne zdań. 1) Wyjdź do ogrodu! 2) Czy dzisiaj jest klasówka z matematyki? 3) Liczba 3 jest większa od liczby 8. 4) Liczba *a* jest liczbą parzystą. 5) Warszawa jest stolicą Polski. Zadanie 2. Dane jest zdanie: „2 jest liczbą parzystą i liczba 5 nie jest podzielna przez 3”. a) Oceń wartość logiczną zdania. b) Napisz zaprzeczenie zdania; podaj prawo	Zadanie 1. Wiadomo, że poniższe zdania złożone są fałszywe. Co można powiedzieć o zdaniach prostych tworzących dane zdania? a) Ania poszła do Kasi lub Ania poszła do Oli. b) Jeśli Bartek będzie grał w gry komputerowe, to nie pójdzie do kina. Zadanie 2. Napisz negację zdania: a) Pojadę na wieś lub zostanę w domu i posprzątam swój pokój. b) Nie wyjdę z domu i obejrzę film lub poczytam książkę. c) Jeśli zdam dobrze maturę z matematyki, to	Zadanie 1. Na pytanie, który z trzech studentów studiował logikę otrzymano następującą odpowiedź: *„Jeśli studiował Marek, to studiował też Wacek i nieprawdą jest, że jeśli studiował Tomek, to studiował Wacek”* Który z chłopców studiował logikę? Zadanie 2. Co można powiedzieć o zbiorach *A* i *B*, jeśli: a) $A \cap B = B$; b) $A \cup B \subset A$; c) $A - B = A \cap B$? Zadanie 3. Podaj przykład równania z jedną niewiadomą, którego dziedziną jest zbiór:

logiczne, z którego skorzystałeś.

Zadanie 3.
Oceń wartość logiczną zdań:
a) $-3^2 = 9$ b) $1^3 - 2^3 \neq (-1)^3$
c) $3 \cdot (1 - 8) \leq -3 \cdot (8 - 1)$

Zadanie 4.
a) Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $C \cap D$, $A - C$, jeśli:
$A = \{ -3, -2, -1, 3, 4 \}$, $B = \{-2, 0, 1, 3 \}$,
$C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
b) Wykonaj działania na zbiorach:
$\boldsymbol{C} - \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{W} \cup \boldsymbol{NW}$, $\boldsymbol{W} \cap \boldsymbol{R}$.
c) Wykonaj działania na przedziałach:
$(2, 5) \cup \langle 3, 8\rangle$; $(-\infty, 3) - (0, 9\rangle$;
$(-7, 8\rangle \cap \langle -7, +\infty)$.

Zadanie 5.
Przedstaw liczbę 2,3(04) w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego. Czy dana liczba jest wymierna czy niewymierna?

Zadanie 6.
Dane jest równanie z niewiadomą x:
$x - \sqrt{3} = 3$.
a) Podaj dziedzinę tego równania.
b) Jaka liczba spełnia to równanie?

dostanę się na studia i zostanę inżynierem.

Zadanie 3.
Oceń wartość logiczną danego twierdzenia. Następnie sformułuj twierdzenie odwrotne do danego i określ, czy jest ono fałszywe, czy prawdziwe.
a) Jeśli liczba całkowita jest podzielna przez 3 i przez 7, to liczba ta jest podzielna przez 21.
b) Jeśli liczba naturalna jest podzielna przez 3 i przez 6, to liczba ta jest podzielna przez 18.

Zadanie 4.
Zbiór $A \cup B$ ma 7 elementów, zbiór B ma 4 elementy, zaś zbiór A ma 5 elementów. Ile elementów ma zbiór $A \cap B$?

Zadanie 5.
Wiedząc, że π jest liczbą niewymierną wykaż, że liczba $2\pi - 1$ też jest liczbą niewymierną.

Zadanie 6.
a) Wyznacz zbiory:
$(-3, 2\rangle \cap \boldsymbol{N}$; $\boldsymbol{C} - (5, +\infty)$; $\boldsymbol{C}_+ \cup \langle 4, +\infty)$;
$(2, 5) - \boldsymbol{N}$.
b) Znajdź dopełnienie danego zbioru w przestrzeni $\boldsymbol{R}$: $A = \langle -7, +\infty)$; $B = \{-4, 3, 5\}$,
$C = (2, 8) \cup \{0\}$.

Zadanie 7.
Podaj przykład równania:
a) którego zbiór rozwiązań jest jednoelementowy;
b) którego zbiór rozwiązań jest dwuelementowy;

a) $\boldsymbol{R} - \{-3, 0\}$ i które ma tylko dwa rozwiązania: 2, 3;
b) $\langle 2, +\infty)$ i które ma tylko jedno rozwiązanie 2.

Zadanie 4.
Określ wartość logiczną zdania i podaj jego zaprzeczenie:
a) $\bigwedge_{x \in \boldsymbol{N}} (x + 2 > 0 \wedge x < 1000)$
b) $\bigvee_{x \in \boldsymbol{C}_+} \left(\frac{x}{2} > 1 \vee x \leq 0 \right)$.

Zadanie 5.
Przedstaw na osi liczbowej zbiór tych liczb rzeczywistych, które spełniają implikację
$(x + 3)(x - 2) = 0 \Rightarrow x < 2$.

	c) które jest sprzeczne; d) które jest tożsamościowe. <u>Zadanie 8.</u> Oceń wartość logiczną zdania: $\bigwedge_{x \in \boldsymbol{R}} x^2 > 0$. Napisz zaprzeczenie tego zdania.	

2. Działania w zbiorach liczbowych

Tematyka zajęć:

- Zbiór liczb naturalnych
- Zbiór liczb całkowitych
- Zbiór liczb wymiernych i zbiór liczb niewymiernych
- Prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych
- Rozwiązywanie równań – metoda równań równoważnych
- Rozwiązywanie nierówności – metoda nierówności równoważnych
- Procenty
- Punkty procentowe
- Wartość bezwzględna. Proste równania i nierówności z wartością bezwzględną
- **(R) Własności wartości bezwzględnej**
- Przybliżenia, błąd bezwzględny i błąd względny, szacowanie

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi wskazać liczby pierwsze i liczby złożone; – zna i potrafi stosować cechy podzielności liczb naturalnych (przez 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10); – potrafi rozłożyć liczbę naturalną na czynniki pierwsze; – potrafi wyznaczyć największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność liczb naturalnych; – potrafi wykonać dzielenie z resztą w zbiorze liczb naturalnych; – zna definicję liczby całkowitej parzystej oraz nieparzystej; – potrafi sprawnie wykonywać działania na ułamkach zwykłych i na ułamkach dziesiętnych; – zna i stosuje w obliczeniach kolejność działań i prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych;	Uczeń: – zna definicję liczb względnie pierwszych; – zna i stosuje w obliczeniach zależność dotyczącą liczb naturalnych różnych od zera: $NWD(a, b) \cdot NWW(a, b) = a \cdot b$; – potrafi wykonać dzielenie z resztą w zbiorze liczb całkowitych ujemnych; – potrafi podać zapis symboliczny wybranych liczb, np. liczby parzystej, liczby nieparzystej, liczby podzielnej przez daną liczbę całkowitą, wielokrotności danej liczby; zapis liczby, która w wyniku dzielenia przez daną liczbę całkowitą daje wskazaną resztę; – potrafi zapisać symbolicznie zbiór na podstawie informacji o jego elementach; – potrafi wymienić elementy zbioru zapisanego symbolicznie;	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania tekstowe o podwyższonym stopniu trudności, dotyczące własności liczb rzeczywistych; – potrafi zbadać liczbę rozwiązań równania typu $\|x - a\| + \|b - x\| = m$, gdzie a i b są danymi liczbami, zaś m – jest parametrem.

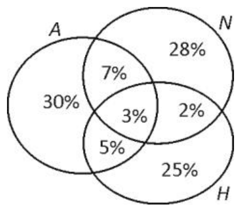
– potrafi porównywać liczby rzeczywiste; – zna własność proporcji i potrafi stosować ją do rozwiązywania równań zawierających proporcje; – zna twierdzenia pozwalające przekształcać w sposób równoważny równania i nierówności; – potrafi rozwiązywać równania z jedną niewiadomą metodą równań równoważnych; – potrafi rozwiązywać nierówności z jedną niewiadomą metodą nierówności równoważnych; – potrafi obliczyć procent danej liczby, a także wyznaczyć liczbę, gdy dany jest jej procent; – potrafi obliczyć, jakim procentem danej liczby jest druga dana liczba; – potrafi określić, o ile procent dana wielkość jest większa (mniejsza) od innej wielkości; – potrafi posługiwać się procentem w prostych zadaniach tekstowych (w tym wzrosty i spadki cen, podatki, kredyty i lokaty); – rozumie pojęcie punktu procentowego i potrafi się nim posługiwać; – potrafi odczytywać dane w postaci tabel i diagramów, a także przedstawiać dane w postaci diagramów procentowych; – potrafi odczytywać dane przedstawione w tabeli lub na diagramie i przeprowadzać analizę procentową przedstawionych danych; – zna definicję wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej i jej interpretację geometryczną; – potrafi obliczyć wartość bezwzględną liczby; – umie zapisać i obliczyć odległość na osi liczbowej między dwoma dowolnymi punktami; – potrafi wyznaczyć przybliżenie dziesiętne liczby rzeczywistej z żądaną dokładnością;	– potrafi wykazać podzielność liczb całkowitych, zapisanych symbolicznie; – umie podać część całkowitą każdej liczby rzeczywistej i część ułamkową liczby wymiernej; – wie, kiedy dwa równania (dwie nierówności) są równoważne i potrafi wskazać równania (nierówności) równoważne; – potrafi rozwiązać proste równania wymierne typu $\frac{2}{x+7}=\frac{1}{4}$; $\frac{x-5}{x-2}=0$; – rozumie zmiany bankowych stóp procentowych i umie wyrażać je w punktach procentowych (oraz bazowych); – potrafi zaznaczyć na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności z wartością bezwzględną typu: $\|x-a\|=b$, $\|x-a\|<b$, $\|x-a\|>b$, $\|x-a\|\le b$, $\|x-a\|\ge b$; – potrafi na podstawie zbioru rozwiązań nierówności z wartością bezwzględną zapisać tę nierówność; – zna własności wartości bezwzględnej i potrafi je stosować w rozwiązywaniu zadań o średnim stopniu trudności; – potrafi oszacować wartość liczby niewymiernej.	

– potrafi obliczyć błąd bezwzględny i błąd względny danego przybliżenia; – potrafi obliczyć błąd procentowy przybliżenia; – potrafi szacować wartości wyrażeń.		

Przykładowe zadania

Zadanie 1. Bartek i Jurek postanowili zmierzyć odległość namiotu od przystani za pomocą swoich kroków. Bartek stawia kroki o długości 48 cm, natomiast Jurek o długości 56 cm. W jakiej odległości od namiotu znajduje się przystań, jeśli ślady stóp chłopców pokryły się 15 razy? Wynik wyraź w metrach. Zadanie 2. Znajdź liczbę wymierną, która znajduje się na osi liczbowej między liczbami: a) $\frac{1}{8}$ i $\frac{1}{6}$ b) $\frac{5}{7}$ i $\frac{6}{7}$ c) $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$ Zadanie 3. a) Rozwiąż nierówność: $\frac{x-2}{3}-\frac{x+5}{2}>5-x$. b) Podaj najmniejszą liczbę pierwszą spełniającą tę nierówność. Zadanie 4. Jabłka zdrożały o 20% i wówczas cena jednego kilograma jabłek wynosiła 4,80 zł. O ile procent cena jabłek przed podwyżką była niższa niż po podwyżce?	Zadanie 1. Wyznacz zbiory $(A \cap B) - D$, $A \cup B$, $(A - B) - D$, jeśli: $A = \{x: x \in \boldsymbol{C}$ i $x \in \langle -3, 4)\}$, $B = (-1, 2\rangle$, $D = \{x : x \in \boldsymbol{R}$ i $\|x - 2\| = 4\}$ Zadanie 2. Wykaż, że suma trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez 3. Zadanie 3. Korzystając z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej, rozwiąż równanie: $\|x + 3{,}5\| = 5$. a) Podaj najmniejszą liczbę pierwszą, która jest większa od rozwiązań tego równania. b) Wyznacz odwrotność liczby $\frac{\|a-b\|}{4}$, gdzie a, b są rozwiązaniami danego równania. Zadanie 4. a) Oblicz: $\|2 - 3\sqrt{3}\|$ b) Rozwiąż nierówność: $\sqrt{x^2+6x+9} \geq 4$ c) Przedział liczbowy (–5, 7) jest zbiorem rozwiązań pewnej nierówności z wartością bezwzględną. Zapisz tę nierówność. Zadanie 5.	Zadanie 1. Iloczyn dwóch liczb naturalnych dodatnich wynosi 1728, a największy ich wspólny dzielnik równa się 24. Znajdź te liczby. Zadanie 2. Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych, spełniających równanie: $x \cdot y - 2y = 5 - x$. Zadanie 3. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze a i b, które spełniają warunek: $a^2 - 1 = 2b^2$. Zadanie 4. Zbadaj liczbę rozwiązań równania $\|x - 6\| + \|1 + x\| = m$ ze względu na wartość parametru m.

Zadanie 5.
Uczestnicy obozu językowego posługiwali się trzema językami obcymi: angielskim (*A*), hiszpańskim (*H*) i niemieckim (*N*), zgodnie z następującym podziałem procentowym:



a) Jaki procent wszystkich uczestników obozu znało język angielski?
b) Jaki procent osób znających język niemiecki znało również pozostałe dwa języki?
c) O ile punktów procentowych więcej było na obozie osób ze znajomością tylko języka angielskiego od osób, które znały tylko język hiszpański?
d) O ile procent mniej było na obozie uczniów, którzy znali tylko język hiszpański od uczniów, którzy znali język angielski lub niemiecki?

Zadanie 6.
a) Porównaj liczby:
$a = \left|\frac{\sqrt{5}}{5} - 1\right|$ oraz $b = |-1{,}5|$.
b) Oblicz odległość między liczbami -6 i 12.
c) Rozwiąż równanie $|x|=3$ i nierówność $|x|<5$.

Zadanie 7.
Na zawodach w skokach narciarskich komentator

Wykaż, że reszta z dzielenia przez 3 sumy kwadratów trzech dowolnych kolejnych liczb całkowitych wynosi 2.

Zadanie 6.
Rozwiąż:
a) równanie $|x + 1| + |x^2 - 1| = 0$
b) nierówność $|2 - x| + |x \cdot (x - 2)| \le 0$.

Zadanie 7.
Sprawdź (nie używając kalkulatora), czy liczba $\frac{2\sqrt{5}-1}{5}$ należy do przedziału $\left(\frac{3}{5},\ 1\right)$.

sportowy ocenił pierwszy skok zawodnika na 122 m, podczas gdy skoczek osiągnął długość skoku równą 124,5 m. Drugi skok miał długość 123,5 m, zaś komentator ocenił go na 126 m. W którym przypadku komentator popełnił większy błąd?		

3. Wyrażenia algebraiczne

Tematyka zajęć:
- Potęga o wykładniku naturalnym
- Pierwiastek arytmetyczny. Pierwiastek stopnia nieparzystego z liczby ujemnej
- Działania na wyrażeniach algebraicznych
- Wzory skróconego mnożenia, cz.1
- **(R) Wzory skróconego mnożenia, cz.2**
- Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym
- Potęga o wykładniku wymiernym
- Potęga o wykładniku rzeczywistym
- Dowodzenie twierdzeń
- Określenie logarytmu
- **(R) Zastosowanie logarytmów**
- Przekształcanie wzorów
- Średnie

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi wykonywać działania na potęgach o wykładniku naturalnym, całkowitym i wymiernym; – zna prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych i stosuje je w obliczeniach; – potrafi zapisać liczbę w notacji wykładniczej; – sprawnie sprowadza wyrażenia algebraiczne do najprostszej postaci i oblicza ich wartości dla podanych wartości zmiennych; – potrafi wyłączać wspólny czynnik z różnych wyrażeń; – potrafi sprawnie posługiwać się wzorami skróconego mnożenia: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	Uczeń: – zna następujące wzory skróconego mnożenia: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$; – sprawnie przekształca wyrażenia zawierające powyższe wzory skróconego mnożenia; – potrafi usunąć niewymierność z mianownika ułamka, stosując wzór skróconego mnożenia na sumę (różnicę sześcianów) – sprawnie przekształca wyrażenia algebraiczne zawierające potęgi i pierwiastki; – sprawnie zamienia pierwiastki arytmetyczne na potęgi o wykładniku wymiernym i odwrotnie;	– Uczeń: – potrafi sprawnie działać na wyrażeniach zawierających potęgi i pierwiastki z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia; – potrafi sprawnie rozkładać wyrażenia zawierające potęgi i pierwiastki na czynniki, stosując jednocześnie wzory skróconego mnożenia i metodę grupowania wyrazów; – potrafi wykorzystać pojęcie logarytmu (a także cechy i mantysy logarytmu dziesiętnego) w zadaniach praktycznych.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ i sprawnie wykonuje działania na wyrażeniach, które zawierają wymienione wzory skróconego mnożenia; – potrafi usuwać niewymierność z mianownika ułamka, stosując wzór skróconego mnożenia (różnicę kwadratów dwóch wyrażeń); – zna pojęcie pierwiastka arytmetycznego z liczby nieujemnej i potrafi stosować prawa działań na pierwiastkach w obliczeniach; – potrafi obliczać pierwiastki stopnia nieparzystego z liczb ujemnych; – potrafi dowodzić proste twierdzenia; – zna definicję logarytmu i potrafi obliczać logarytmy bezpośrednio z definicji; – sprawnie przekształca wzory matematyczne, fizyczne i chemiczne; – zna pojęcie średniej arytmetycznej, średniej ważonej i średniej geometrycznej liczb oraz potrafi obliczyć te średnie dla podanych liczb.	– sprawnie wykonywać działania na potęgach o wykładniku rzeczywistym; – potrafi wyłączać wspólną potęgę poza nawias; – potrafi rozłożyć wyrażenia na czynniki metodą grupowania wyrazów lub za pomocą wzorów skróconego mnożenia; – potrafi oszacować wartość potęgi o wykładniku rzeczywistym; – potrafi dowodzić twierdzenia, posługując się dowodem wprost; – potrafi dowodzić twierdzenia, posługując się dowodem nie wprost; – zna i potrafi stosować własności logarytmów w obliczeniach; – stosuje średnią arytmetyczną, średnią ważoną i średnią geometryczną w zadaniach tekstowych.	

Przykładowe zadania

Zadanie 1. Oblicz wartość wyrażenia: $8^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3^2+4^2} + \left(\frac{1}{9^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot \left(27^{-\frac{2}{3}}\right) + \sqrt[3]{-64}$ Zadanie 2. Usuń niewymierność z mianownika ułamka: a) $\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{8}-4}{2-\sqrt{2}}$	Zadanie 1. Sprowadź wyrażenie: $[y^3 : (y^2 \cdot y^{-3})]^4 : \left[\left(\frac{1}{y}\right)^4 \cdot \frac{1}{y^{-2}}\right]^{-3}$ do najprostszej postaci i oblicz jego wartość dla $y = \sqrt{2\sqrt{2}}$. Zadanie 2. Oblicz wartość wyrażenia:	Zadanie 1. Wykaż, że liczba $\sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt[4]{4}$ jest całkowita. Zadanie 2. Rozłóż na czynniki wyrażenia: a) $x^4 + 1$ b) $x^5 - 5x^3 - 8x^2 + 40$. Zadanie 3. Usuń niewymierność z mianownika ułamka

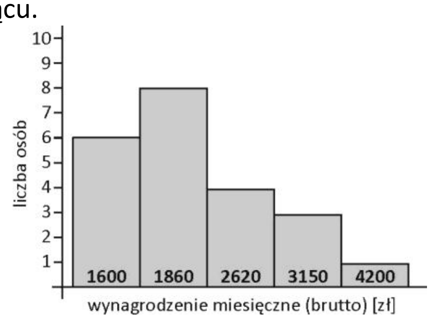
Zadanie 3.
Wyłącz wspólny czynnik poza nawias:
a) $(a-b)-(a-b)^2$
b) $(b-a)xy+(a-b)xyz-(b-a)z^2$.

Zadanie 4.
Wykaż, że jeśli a i b są liczbami dodatnimi to
$a+b\ge 2\sqrt{ab}$.

Zadanie 5.
Oblicz: $3\log(\log_2 32\cdot\log_5 25)$.

Zadanie 6.
Wyznacz podaną wielkość ze wzoru:
a) $\frac{1}{f}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$; f b) $P=2\pi r(r+h)$; h.

Zadanie 7.
Poniższy diagram przedstawia wynagrodzenie brutto pracowników pewnej firmy w tym miesiącu.



a) Oblicz średnie wynagrodzenie brutto w tej firmie.
b) Podaj, jaki procent pracowników zarabia więcej, niż wynosi średnie wynagrodzenie w tej

$$\left[\left(4-12^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(4+12^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

Zadanie 3.
Wykaż, że:
a) liczba $6^{20}+3\cdot 6^{19}-4\cdot 6^{18}$ jest podzielna przez 5.
b) liczba $5^{18}-1$ jest podzielna przez 31.

Zadanie 4.
Usuń niewymierność z mianownika ułamka
$\frac{1}{9-3\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{36}}$

Zadanie 5.
Oblicz (bez użycia kalkulatora) przybliżoną wartość potęgi: $0{,}0001^{-\sqrt{5}}$, jeśli $\sqrt{5}\approx 2{,}25$

Zadanie 6.
Wykaż, że jeśli $a+b=1$ i $a^2+b^2=5$, to $a^4+b^4=17$.

Zadanie 7.
Wykaż, stosując dowód nie wprost, że jeśli liczby a i b są dodatnie, to $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$.

Zadanie 8.
Wykaż, że jeśli $x+y=6$, $x\in\mathbf{R}$ i $y\in\mathbf{R}$, to $x^2+y^2\ge 18$.

$$\frac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{21}+\sqrt{15}+\sqrt{10}}$$

Zadanie 4.
Wykaż, że jeśli liczby x, y, z są dodatnie i $x+y+z=1$ to $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 9$.

Zadanie 5.
Oblicz wartość pH kwasu solnego, wiedząc, że stężenie jonów wodorowych w tym kwasie jest równe 0,05 mol/dm^3. Wynik podaj w przybliżeniu dziesiętnym, z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

firmie. c) Od przyszłego miesiąca każdy pracownik ma zarabiać o 100 zł więcej, niż w tym miesiącu. Oblicz średni procent, o jaki planowany jest wzrost wynagrodzeń w tej firmie. Wyniki podaj w przybliżeniu dziesiętnym, z dokładnością do 0,1%.	<u>Zadanie 9.</u> Wykaż, że jeśli $a > 2$ i $b < 4$, to $\frac{ab}{2}+4<b+2a$. <u>Zadanie 10.</u> Niech $\log 2 = a$ i $\log 3 = b$. Wyraź za pomocą a i b wyrażenie: $\log 8 \cdot \log_8 6$. <u>Zadanie 11.</u> Na wycieczkę w góry pojechało 21 osób o średniej wieku 23 lata. Średnia ta wzrosła do 24 lat, po doliczeniu wieku przewodnika, który dołączył do wycieczki w Zakopanem. Ile lat miał przewodnik?	

4. Geometria płaska – pojęcia wstępne

Tematyka zajęć:

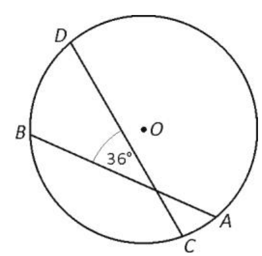
- Punkt, prosta, odcinek, półprosta, kąt, figura wypukła, figura ograniczona
- Łamana. Wielokąt. Wielokąt foremny
- Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie, odległość punktu od prostej, odległość między prostymi równoległymi, symetralna odcinka, dwusieczna kąta
- Dwie proste przecięte trzecią prostą. Suma kątów w wielokącie
- **(R) Wektor na płaszczyźnie (bez układu współrzędnych)**
- **(R) Wybrane przekształcenia płaszczyzny, cz.1**
- **(R) Wybrane przekształcenia płaszczyzny, cz.2**
- Twierdzenie Talesa
- Okrąg i koło
- Kąty i koła

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna figury podstawowe (punkt, prosta, płaszczyzna, przestrzeń) i potrafi zapisać relacje między nimi; – zna pojęcie figury wypukłej i wklęsłej; potrafi podać przykłady takich figur; – zna pojęcie figury ograniczonej i figury nieograniczonej, potrafi podać przykłady takich figur; – umie określić położenie prostych na płaszczyźnie; – rozumie pojęcie odległości, umie wyznaczyć odległość dwóch punktów, punktu od prostej, dwóch prostych równoległych; – zna określenie kąta i podział kątów ze względu na ich miarę; – zna pojęcie kątów przyległych i kątów	Uczeń: – potrafi zapisać miarę stopniową kąta, używając minut i sekund; – zna pojęcie łamanej, łamanej zwyczajnej, łamanej zwyczajnej zamkniętej; – zna definicję wielokąta; – zna i potrafi stosować wzór na liczbę przekątnych wielokąta; – wie, jaki wielokąt nazywamy foremnym; – potrafi udowodnić twierdzenie dotyczące sumy miar kątów wewnętrznych wielokąta wypukłego; – potrafi udowodnić, że suma miar kątów zewnętrznych wielokąta wypukłego jest stała; – zna definicję wektora na płaszczyźnie (bez układu współrzędnych); – wie, jakie wektory są równe, a jakie przeciwne; – potrafi wektory dodawać, odejmować i mnożyć	Uczeń: – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące odcinków, prostych, półprostych, kątów i kół, w tym z zastosowaniem poznanych twierdzeń; – zna i potrafi udowodnić twierdzenie o dwusiecznych kątów przyległych; – umie udowodnić twierdzenia o kątach środkowych i wpisanych w koło; – umie udowodnić twierdzenie o kącie dopisanym do okręgu; – umie udowodnić własności figur geometrycznych w oparciu o poznane twierdzenia.

wierzchołkowych oraz potrafi zastosować własności tych kątów w rozwiązywaniu prostych zadań; – zna pojęcie dwusiecznej kąta i symetralnej odcinka, potrafi zastosować własność dwusiecznej kąta oraz symetralnej odcinka w rozwiązywaniu prostych zadań, – umie skonstruować dwusieczną danego kąta i symetralną danego odcinka; – zna własności kątów utworzonych między dwiema prostymi równoległymi, przeciętymi trzecią prostą i umie zastosować je w rozwiązywaniu prostych zadań; potrafi uzasadnić równoległość dwóch prostych, znajdując równe kąty odpowiadające; – zna twierdzenie Talesa; potrafi je stosować do podziału odcinka w danym stosunku, do konstrukcji odcinka o danej długości, do obliczania długości odcinka w prostych zadaniach; – zna twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa i potrafi je stosować do uzasadnienia równoległości odpowiednich odcinków lub prostych; – zna wnioski z twierdzenia Talesa i potrafi je stosować w rozwiązywaniu prostych zadań; – zna definicję koła i okręgu, poprawnie posługuje się terminami: promień, środek okręgu, cięciwa, średnica, łuk okręgu; – potrafi określić wzajemne położenie prostej i okręgu; – zna definicję stycznej do okręgu; – zna twierdzenie o stycznej do okręgu i potrafi je wykorzystywać przy rozwiązywaniu prostych	przez liczbę; – zna prawa dotyczące działań na wektorach; – potrafi stosować wiedzę o wektorach w rozwiązywaniu zadań geometrycznych; – zna definicję przekształcenia geometrycznego; – wie, co to jest punkt stały przekształcenia geometrycznego; – wie, jakie przekształcenie geometryczne jest tożsamościowe; – wie, jakie przekształcenie geometryczne jest izometrią; – zna definicje i własności takich przekształceń izometrycznych, jak: przesunięcie równoległe o wektor, symetria osiowa względem prostej, symetria środkowa względem punktu; – wie, co to jest oś symetrii figury (figura osiowosymetryczna); – wie, co to jest środek symetrii figury (figura środkowosymetryczna); zna przekształcenia nieizometryczne – rzut równoległy na prostą oraz powinowactwo prostokątne; – potrafi skonstruować styczną do okręgu, przechodzącą przez punkt leżący w odległości większej od środka okręgu niż długość promienia okręgu; potrafi skonstruować styczną do okręgu przechodzącą przez punkt leżący na okręgu; – wie, co to jest kąt dopisany do okręgu; zna twierdzenie o kątach wpisanym i dopisanym do okręgu, opartych na tym samym łuku; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące okręgów, stycznych, kątów środkowych, wpisanych i dopisanych, z zastosowaniem poznanych twierdzeń;	

zadań; – zna twierdzenie o odcinkach stycznych i potrafi je stosować w rozwiązywaniu prostych zadań; – umie określić wzajemne położenie dwóch okręgów; – posługuje się terminami: kąt wpisany w koło, kąt środkowy koła; zna twierdzenia dotyczące kątów wpisanych i środkowych i umie je zastosować przy rozwiązywaniu prostych zadań.	– potrafi rozwiązywać zadania złożone, wymagające wykorzystania równocześnie kilku poznanych własności.	

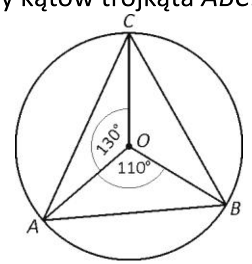
Przykładowe zadania

Zadanie 1. Punkt *C* dzieli odcinek *AB* długości 24 cm na dwa odcinki, których stosunek długości jest równy 6 : 2. Jaka jest długość każdego z odcinków? Zadanie 2. Różnica miar dwóch kątów przyległych wynosi 21°. Oblicz miary tych kątów. Zadanie 3. Na płaszczyźnie dane są punkty: *A*, *B*, *P*, *Q*, przy czym $A \neq B$, $\|AP\| = \sqrt{12}$ cm, $\|BP\| = 3\sqrt{2}$ cm, $\|AQ\| = \frac{49}{9}$ cm, $\|BQ\| = 5,(4)$ cm. Sprawdź, czy punkty *P*, *Q* należą do symetralnej odcinka *AB*. Z jakiej własności symetralnej skorzystasz? Zadanie 4. Dany jest odcinek długości *a*. Podziel ten odcinek: a) na 5 odcinków równej długości; b) w stosunku 2 : 7.	Zadanie 1. W sześciokącie foremnym ABCDEF dane są: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AF}=\vec{b}$. Wyraź wektory $\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BC},\overline{CF}$ za pomocą wektorów $\vec{a}$ oraz $\vec{b}$. Zadanie 2. Wykaż, korzystając z działań na wektorach, że symetria środkowa jest izometrią. Zadanie 3. Cięciwy *AB* i *CD* przecinają się pod kątem 36°. Wyznacz kąty środkowe, odpowiadające łukom *AC* i *BD*, jeżeli stosunek ich długości wynosi 1 : 3.  Zadanie 4.	Zadanie 1. Uzasadnij, korzystając z wiadomości o wektorach, że odcinek łączący środki przekątnych dowolnego trapezu jest równoległy do podstaw i jego długość jest równa połowie różnicy długości podstaw. Zadanie 2. Wykaż, że prawdziwe jest twierdzenie: Jeśli istnieje okrąg, który jest styczny do wszystkich boków czworokąta wypukłego, to sumy długości dwóch przeciwległych boków tego czworokąta są sobie równe. Zadanie 3. Wykaż, że jeśli przez wszystkie wierzchołki czworokąta wypukłego można poprowadzić okrąg, to sumy miar przeciwległych kątów czworokąta są równe 180°.

Zadanie 5.
W trapezie *ABCD*, *AB* || *CD*, mamy dane:
$|AB| = 12$ cm, $|CD| = 7$ cm, $|AD| = 8$ cm. O ile należy wydłużyć ramię *AD*, aby przecięło się z przedłużeniem ramienia *BC*?

Zadanie 6.
Miara kąta utworzonego przez dwa promienie okręgu wynosi 146°. Oblicz miarę kąta, który tworzą styczne poprowadzone przez końce tych promieni.

Zadanie 7.
Wyznacz miary kątów trójkąta *ABC*.



Zadanie 8.

Dany jest okrąg o środku w punkcie *O*

i promieniu 2 oraz prosta *k*, której odległość od punktu *O* jest równa $4a - 3$.

Wyznacz *a* tak, aby prosta *k* była:

a) styczną do okręgu $o(O, 2)$;

b) sieczną okręgu $o(O, 2)$;

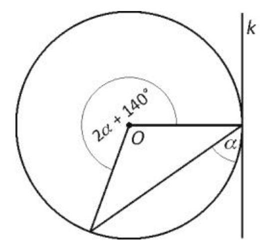
c) rozłączna z okręgiem $o(O, 2)$.

Do danego okręgu poprowadzono styczną tak, że końce *A* i *B* średnicy *AB* tego okręgu są odległe od stycznej o 25 cm i 15 cm. Oblicz długość średnicy *AB*.

Zadanie 5.
Kąty *AOC* i *BOD* są kątami wierzchołkowymi. Wykaż, że przedłużenie dwusiecznej kąta *AOC* jest dwusieczną kąta *BOD*.

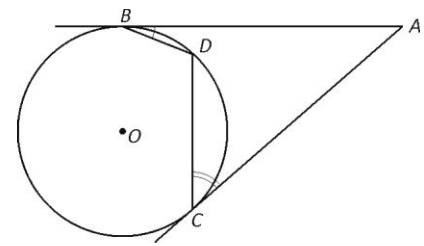
Zadanie 6.
W trójkącie *ABC* poprowadzono trzy proste równoległe do podstawy *AB*, dzielące bok *BC* na cztery odcinki równej długości. Suma długości odcinków tych prostych zawartych w trójkącie *ABC* jest o 6 dm większa od długości podstawy *AB*. Oblicz $|AB|$.

Zadanie 7.
Prosta *k* jest styczna do okręgu. Oblicz miarę kąta α dopisanego do okręgu:



Zadanie 8.
Dane są dwa okręgi $o(A, r_1)$, $o(B, r_2)$ takie, że $r_1 = 3k + 1$, $r_2 = 2k + 3$, $|AB| = 6k - 3$. Określ położenie okręgów, w zależności od parametru *k*.

Zadanie 4.
Punkt *D* leży na łuku *BC* wewnątrz trójkąta *ABC*. Wykaż, że suma $|\angle ABD| + |\angle ACD|$ jest stała (tzn. nie zależy od położenia punktu *D* na łuku *BC*). Czy teza zadania będzie prawdziwa, jeśli punkt *D* będzie leżał na łuku *BC* na zewnątrz trójkąta *ABC*?



	<u>Zadanie 9.</u> Z punktu zewnętrznego *A* poprowadzono styczne *AB* i *AC* do okręgu o środku w punkcie *O* (*B*, *C* – punkty styczności). Wykaż, że jeśli miara kąta między stycznymi równa się mierze kąta zawartego między promieniami poprowadzonymi ze środka koła do punktów styczności, to czworokąt *ABOC* jest kwadratem.	

5. Geometria płaska – trójkąty

Tematyka zajęć:

- Podział trójkątów. Suma kątów w trójkącie. Nierówność trójkąta. Odcinek łączący środki dwóch boków w trójkącie
- Twierdzenie Pitagorasa. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa
- Wysokości w trójkącie. Środkowe w trójkącie
- Symetralne boków trójkąta. Okrąg opisany na trójkącie
- Dwusieczne kątów trójkąta. Okrąg wpisany w trójkąt
- Przystawanie trójkątów
- Podobieństwo trójkątów
- **(R) Twierdzenie o stycznej i siecznej**

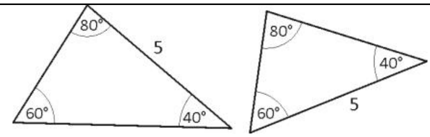
Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna podział trójkątów ze względu na boki i kąty; – wie, ile wynosi suma miar kątów w trójkącie i w czworokącie; – zna warunek na długość odcinków, z których można zbudować trójkąt; – zna twierdzenie dotyczące odcinka łączącego środki dwóch boków trójkąta i potrafi je zastosować w rozwiązywaniu prostych zadań; – zna twierdzenie Pitagorasa i umie je zastosować w rozwiązywaniu prostych zadań; – zna twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i wykorzystuje je do sprawdzenia, czy dany trójkąt jest prostokątny; – umie określić na podstawie długości boków trójkąta, czy trójkąt jest ostrokątny, czy rozwartokątny; – umie narysować wysokości w trójkącie i wie, że wysokości (lub ich przedłużenia) przecinają się	Uczeń: – zna zależności między bokami w trójkącie (nierówności trójkąta) i stosuje je przy rozwiązywaniu zadań; – potrafi udowodnić twierdzenie o odcinku łączącym środki boków w trójkącie; – zna i umie zastosować w zadaniach własność wysokości w trójkącie prostokątnym, poprowadzonej na przeciwprostokątną; – potrafi obliczyć długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt równoramienny i długość promienia okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym, mając dane długości boków trójkąta; – potrafi udowodnić proste własności trójkątów, wykorzystując cechy przystawania trójkątów; – potrafi uzasadnić, że symetralna odcinka jest zbiorem punktów płaszczyzny równoodległych od końców odcinka; – potrafi uzasadnić, że każdy punkt należący do	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności, dotyczących trójkątów, z wykorzystaniem poznanych twierdzeń; – potrafi udowodnić twierdzenie o środkowych w trójkącie; – potrafi udowodnić twierdzenie dotyczące wysokości w trójkącie prostokątnym, poprowadzonej na przeciwprostokątną. – potrafi udowodnić twierdzenie o stycznej i siecznej.

w jednym punkcie; – zna twierdzenie o środkowych w trójkącie oraz potrafi je zastosować przy rozwiązywaniu prostych zadań; – zna pojęcie środka ciężkości trójkąta; – zna twierdzenie o symetralnych boków w trójkącie; – wie, że punkt przecięcia symetralnych boków trójkąta jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie i potrafi skonstruować ten okrąg; – zna twierdzenie o dwusiecznych kątów w trójkącie; – wie, że punkt przecięcia się dwusiecznych kątów w trójkącie jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt i potrafi skonstruować ten okrąg; – zna i stosuje przy rozwiązywaniu prostych zadań własności trójkąta równobocznego: długość wysokości w zależności od długości boku, długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie, długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt; – zna i stosuje własności trójkąta prostokątnego: suma miar kątów ostrych trójkąta, długość wysokości w trójkącie prostokątnym równoramiennym w zależności od długości przyprostokątnej; długość promienia okręgu opisanego na trójkącie i długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt w zależności od długości boków trójkąta, zależność między długością środkowej poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego a długością przeciwprostokątnej; – zna podstawowe własności trójkąta	dwusiecznej kąta leży w równej odległości od ramion tego kąta; – potrafi udowodnić twierdzenie o symetralnych boków i twierdzenie o dwusiecznych kątów w trójkącie; – umie udowodnić twierdzenie o odcinkach stycznych; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące okręgów wpisanych w trójkąt i okręgów opisanych na trójkącie; – potrafi stosować cechy podobieństwa trójkątów do rozwiązania zadań z wykorzystaniem innych, wcześniej poznanych własności; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące trójkątów, z zastosowaniem poznanych do tej pory twierdzeń; – zna twierdzenie o stycznej i siecznej oraz potrafi je stosować w rozwiązywaniu zadań geometrycznych.	

równoramiennego i stosuje je przy rozwiązywaniu prostych zadań; – zna trzy cechy przystawania trójkątów i potrafi je zastosować przy rozwiązywaniu prostych zadań; – zna cechy podobieństwa trójkątów; potrafi je stosować do rozpoznawania trójkątów podobnych i przy rozwiązaniach prostych zadań; – umie obliczyć skalę podobieństwa trójkątów podobnych.		

Przykładowe zadania

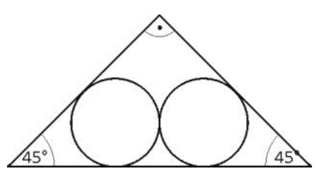
<u>Zadanie 1.</u> W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie jest dwa razy większy niż kąt przy wierzchołku. Wyznacz kąty tego trójkąta. <u>Zadanie 2.</u> Wielkość telewizora wyraża się długością przekątnej ekranu mierzonej w calach (1 cal = = 2,54 cm). Oblicz, ile cali ma telewizor, którego wymiary ekranu wynoszą 42 cm na 31,5 cm. Wynik podaj z dokładnością do 1 cala. <u>Zadanie 3.</u> Dane są odcinki długości *a*, *b* oraz *c*. Skonstruuj odcinek długości: $\frac{\sqrt{3}ac}{\sqrt{2}b}$. <u>Zadanie 4.</u> Czy poniższe trójkąty są przystające? Odpowiedź uzasadnij.	<u>Zadanie 1.</u> Dwa boki trójkąta mają długość 1 cm i 4 cm. Oblicz obwód tego trójkąta, jeżeli wiadomo, że długość trzeciego boku wyraża się liczbą naturalną. <u>Zadanie 2.</u> W trójkącie prostokątnym *ABC* przedłużono przeciwprostokątną *AB* i obrano na przedłużeniach punkty *D* i *E* tak, że $\lvert AD\rvert = \lvert AC\rvert$ oraz $\lvert BE\rvert = \lvert BC\rvert$. Oblicz miarę kąta *DCE*. <u>Zadanie 3.</u> W trójkącie boki mają długość: 17 cm, 25 cm, 28 cm. a) Sprawdź, czy ten trójkąt jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny. b) Oblicz długość wysokości poprowadzonej na najdłuższy bok. c) Podaj długość odcinków, na jakie spodek wysokości podzielił najdłuższy bok trójkąta.	<u>Zadanie 1.</u> Wykaż, że suma odległości dowolnego punktu płaszczyzny od wierzchołków czworokąta jest większa od połowy obwodu tego czworokąta. <u>Zadanie 2.</u> W trójkącie równoramiennym wysokość opuszczona na podstawę jest równa odcinkowi, który łączy środek podstawy ze środkiem ramienia. Podstawa trójkąta ma długość *a*. Jaką długość ma wysokość opuszczona na podstawę? <u>Zadanie 3.</u> Niech *a*, *b*, *c* będą długościami boków w dowolnym trójkącie. Wykaż, że prawdziwa jest nierówność: $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$. <u>Zadanie 4.</u> Dany jest trójkąt *ABC*, w którym $\lvert AB\rvert = \lvert AC\rvert$ oraz $\lvert\angle ABC\rvert = 3\lvert\angle BAC\rvert$. Wykaż, że jeżeli półproste $\overrightarrow{BK}$ i $\overrightarrow{BL}$ dzielą kąt $\angle ABC$ na



Zadanie 5.
W trójkącie ABC dane są długości boków:
$|AB| = 12$ cm, $|BC| = 8$ cm, $|AC| = 10$ cm. Punkt D dzieli bok AB na takie dwa odcinki, że $|AD| : |DB| = 3 : 5$. Przez punkt D poprowadzono prostą równoległą do boku AC, która przecięła bok BC w punkcie E. Oblicz długości odcinków: CE, BE i DE.

Zadanie 6.
W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona na przeciwprostokątną ma długość 4 cm. Spodek tej wysokości leży w odległości $1\frac{1}{6}$ cm od środka okręgu opisanego na trójkącie. Oblicz:
a) długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie;
b) długość boków tego trójkąta.

Zadanie 7.
W trójkąt prostokątny równoramienny wpisano dwa okręgi, styczne zewnętrznie do siebie, każdy o promieniu 1 cm (jak na rysunku poniżej).



Oblicz obwód tego trójkąta.

Zadanie 4.
Udowodnij, że w trójkącie równoramiennym dwusieczne kątów przy podstawie są równej długości.

Zadanie 5.
W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długość: $|AB| = 32$ cm, $|AC| = 24$ cm. Symetralna boku BC przecina ten bok w punkcie D, bok AB w punkcie E i przedłużenie boku AC w punkcie F. Udowodnij, że trójkąt EBD jest podobny do trójkąta EAF i oblicz skalę tego podobieństwa.

Zadanie 6.
Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Punkty P, Q, R leżą na bokach trójkąta ABC (po jednym na każdym boku) w taki sposób, że każdy bok trójkąta PQR jest prostopadły do jednego boku trójkąta ABC.
a) Wykaż, że trójkąt PQR jest równoboczny.
b) Wyznacz stosunek $\frac{|AB|}{|PQ|}$.

Zadanie 7.
Dany jest okrąg o promieniu 3. Z punktu P oddalonego od środka okręgu o 5 poprowadzono styczną do okręgu oraz sieczną przecinającą okrąg w punktach A i B tak, że $|BP| : |AP| = 3 : 2$. Oblicz długość odcinka AB.

trzy równe części ($|\angle LBC| = \frac{1}{3}|\angle ABC|$), to trójkąty BCL, BCK, BKA są równoramienne.

Zadanie 5.
Okręgi o promieniach długości 2 cm i 3 cm są styczne zewnętrznie w punkcie A. Znajdź odległość punktu A od prostej, do której nie należy punkt A, a która jest styczna jednocześnie do obu okręgów.

6. Trygonometria

Tematyka zajęć:

- Określenie sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa w trójkącie prostokątnym
- Wartości sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa dla kątów 30°, 45°, 60°
- Kąt skierowany
- Sinus, cosinus, tangens i cotangens dowolnego kąta
- Podstawowe tożsamości trygonometryczne
- Wzory redukcyjne
- **(R) Twierdzenie sinusów**
- **(R) Twierdzenie cosinusów**

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym o danych długościach boków; – potrafi korzystać z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora); – zna wartości funkcji trygonometrycznych kątów o miarach 30°, 45°, 60°; – potrafi rozwiązywać trójkąty prostokątne; – potrafi obliczać wartości wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne kątów o miarach 30°, 45°, 60°; – zna definicje sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa dowolnego kata wypukłego; – potrafi wyznaczyć (korzystając z definicji) wartości funkcji trygonometrycznych takich kątów wypukłych, jak: 120°,135°, 150°; – zna znaki funkcji trygonometrycznych kątów	Uczeń: – zna pojęcie kąta skierowanego; – wie, co to jest miara główna kąta skierowanego i potrafi ją wyznaczyć dla dowolnego kąta; – zna definicje sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa dowolnego kata; – umie podać znaki wartości funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach; – potrafi obliczyć, na podstawie definicji, wartości funkcji trygonometrycznych kątów: 210°, 240°, 315°, 330° itd.; – umie zbudować w układzie współrzędnych dowolny kąt o mierze α, gdy dana jest wartość jednej funkcji trygonometrycznej tego kąta; – zna i potrafi stosować podstawowe tożsamości trygonometryczne (dla dowolnego kąta, dla którego funkcje trygonometryczne są określone) – zna i potrafi stosować wzory redukcyjne;	Uczeń: – potrafi udowodnić twierdzenie sinusów; – potrafi udowodnić twierdzenie cosinusów; – potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności, wymagające niekonwencjonalnych pomysłów i metod.

wypukłych, różnych od 90°; zna wartości funkcji trygonometrycznych (o ile istnieją) kątów o miarach: 0°, 90°, 180°; – potrafi obliczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta wypukłego, gdy dana jest jedna z nich; – zna i potrafi stosować podstawowe tożsamości trygonometryczne (w odniesieniu do kąta wypukłego): $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$; – zna wzory redukcyjne dla kąta $90° - \alpha$, $90° + \alpha$ oraz $180° - \alpha$; – potrafi stosować poznane wzory redukcyjne w obliczaniu wartości wyrażeń; – potrafi zastosować poznane wzory redukcyjne w zadaniach geometrycznych; – potrafi zbudować kąt wypukły znając wartość jednej z funkcji trygonometrycznych tego kąta.	– potrafi dowodzić różne tożsamości trygonometryczne; – zna twierdzenie sinusów i potrafi je stosować w zadaniach geometrycznych; – zna twierdzenie cosinusów i potrafi stosować je w zadaniach geometrycznych; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności, wykorzystując także wcześniej poznaną wiedzę o figurach geometrycznych.	

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Oblicz wartość wyrażenia: $\sin 30° \cdot \cos 60° + \operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{ctg} 30°$. <u>Zadanie 2.</u> W trójkącie prostokątnym *ABC* dane są: długość przeciwprostokątnej $\|BC\| = \sqrt{146}$ cm oraz długość przyprostokątnej $\|AB\| = 5$ cm. a) Oblicz długość drugiej przyprostokątnej. b) Oblicz miary kątów ostrych trójkąta (skorzystaj	<u>Zadanie 1.</u> Zbuduj kąt o mierze α takiej, że a) $\sin\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ b) $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{7}$. Wyznacz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta α. <u>Zadanie 2.</u> Posługując się wzorem $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, oblicz $\sin 15°$.	<u>Zadanie 1.</u> Wiedząc, że $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, oblicz: a) $\|\sin\alpha - \cos\alpha\|$, b) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$; c) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$. <u>Zadanie 2.</u> Balon wznosi się pionowo. W chwili, gdy znajduje

z tablic wartości funkcji trygonometrycznych).
c) Oblicz długość wysokości trójkąta poprowadzonej na przeciwprostokątną oraz cosinus kąta, jaki tworzy ta wysokość z krótszą przyprostokątną.

Zadanie 3.
Kąt wzniesienia wieży, zmierzony w odległości 80 m od jej podstawy, ma miarę 48°. Jaką wysokość ma wieża?

Zadanie 4.
Wyznacz, korzystając z definicji, wartości funkcji trygonometrycznych kąta 120°.

Zadanie 5.
Oblicz, stosując odpowiednie wzory redukcyjne, wartość wyrażenia:
a) $\sin 135^\circ + \operatorname{tg} 120^\circ \cdot \cos 150^\circ$
b) $\sin^2 17^\circ + \sin^2 73^\circ - \cos 120^\circ$.

Zadanie 6.
Oblicz, bez użycia tablic i kalkulatora:
$\operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 130^\circ$.

Zadanie 7.
Niech α, β, γ oznaczają miary kątów dowolnego trójkąta. Wykaż, że prawdziwa jest zależność:
$\sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\beta+\gamma}{2}$.

Zadanie 8.

Zadanie 3.
W trójkącie prostokątnym *a*, *b* oznaczają długości przyprostokątnych, α jest miarą kąta leżącego naprzeciw przyprostokątnej długości *a*. Wiedząc, że $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$, oblicz:
a) tangens α;
b) wartość wyrażenia: $\frac{b}{a+b} + \frac{a^2}{a^2-b^2}$.

Zadanie 4.
Sprawdź, czy równość
$\frac{\cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha}$ jest tożsamością trygonometryczną. Podaj konieczne założenia.

Zadanie 5.
Oblicz wartość wyrażenia:
$\sin 960^\circ \cdot \operatorname{tg} 420^\circ - \cos 1410^\circ$.

Zadanie 6.
Oblicz długość środkowej *CD* w trójkącie *ABC*, jeśli dane są długości boków trójkąta: $a = 5$, $b = 6$, $c = 10$.

Zadanie 7.
W trójkącie *ABC* dane są długości boków:
$a = 2\sqrt{3}$, $b = 3\sqrt{2}$, $c = 3 - \sqrt{3}$. Wyznacz miarę największego kąta tego trójkąta oraz promień koła opisanego na tym trójkącie.

się na wysokości *h* metrów nad ziemią, osoba lecąca balonem mierzy kąt depresji α przedmiotu znajdującego się na ziemi. Po upływie *t* sekund powtarza pomiar i otrzymuje kąt β. Z jaką średnią prędkością *v* wznosi się balon?

Zadanie 3.
Wykaż, że jeśli *a*, *b*, *c* są długościami boków trójkąta oraz $a < \frac{b+c}{2}$, to miary kątów α, β, γ, leżących naprzeciw tych boków, spełniają nierówność $\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}$.

Zbuduj kąt o mierze α, $\alpha \in (90°, 180°)$ takiej, że a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ b) $\operatorname{ctg} \alpha = -4$. Wyznacz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta α. <u>Zadanie 9.</u> Oblicz wartość wyrażenia $\frac{5\sin\alpha - 4\cos\alpha}{3\cos\alpha + 8\sin\alpha}$ wiedząc, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$.	<u>Zadanie 8.</u> W pewnym trójkącie miary kątów α, β, γ spełniają warunek: $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin^2\gamma$. Wykaż, że trójkąt ten jest prostokątny.	

7. Geometria płaska – pole koła, pole trójkąta

Tematyka zajęć:

- Pole figury geometrycznej
- Pole trójkąta, cz. 1
- Pole trójkąta, cz. 2
- Pola trójkątów podobnych
- Pole koła, pole wycinka koła
- **(R) Zastosowanie pojęcia pola w dowodzeniu twierdzeń**

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – rozumie pojęcie pola figury; zna wzór na pole kwadratu i pole prostokąta; – zna następujące wzory na pole trójkąta: $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, gdzie a – długość boku trójkąta równobocznego $P = \frac{1}{2} a \cdot h_a$, $P = a \cdot b \cdot \sin\gamma$, gdzie $\gamma \in (0^\circ, 180^\circ)$ $P = \frac{abc}{4R}$, $P = \frac{1}{2} p \cdot r$, gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$ $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$; – potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące trójkątów, wykorzystując wzory na pole trójkąta i poznane wcześniej twierdzenia; – potrafi obliczyć wysokość trójkąta, korzystając	Uczeń: – potrafi wyprowadzić wzór na pole trójkąta równobocznego i wzory: $P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$, $P = \frac{1}{2} p \cdot r$, gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$, ze wzoru $P = \frac{1}{2} ah_a$; – potrafi rozwiązywać zadania geometryczne o średnim stopniu trudności, stosując wzory na pola trójkątów, w tym również z wykorzystaniem poznanych wcześniej własności trójkątów; – potrafi rozwiązywać zadania geometryczne, wykorzystując cechy podobieństwa trójkątów, twierdzenie o polach figur podobnych; – rozwiązuje zadania dotyczące trójkątów, w których wykorzystuje twierdzenia poznane wcześniej (tw. Pitagorasa, tw. Talesa, – tw. sinusów, tw. cosinusów, twierdzenia o kątach w kole, itp.) – potrafi dowodzić twierdzenia, w których wykorzystuje pojęcie pola.	Uczeń: – potrafi udowodnić twierdzenie Pitagorasa oraz twierdzenie Talesa z wykorzystaniem pól odpowiednich trójkątów; – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania geometryczne o podwyższonym stopniu trudności z wykorzystaniem wzorów na pola figur i innych twierdzeń.

ze wzoru na pole; – potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące trójkątów, wykorzystując wzory na ich pola i poznane wcześniej twierdzenia, w szczególności twierdzenie Pitagorasa oraz własności okręgu wpisanego w trójkąt i okręgu opisanego na trójkącie; – zna twierdzenie o polach figur podobnych; potrafi je stosować przy rozwiązywaniu prostych zadań; – zna wzór na pole koła i pole wycinka koła; umie zastosować te wzory przy rozwiązywaniu prostych zadań; – wie, że pole wycinka koła jest wprost proporcjonalne do miary odpowiadającego mu kąta środkowego koła i jest wprost proporcjonalne do długości odpowiadającego mu łuku okręgu oraz umie zastosować tę wiedzę przy rozwiązywaniu prostych zadań.		

Przykładowe zadania

Zadanie 1. Z kawałka trójkątnego materiału o obwodzie 1,12 m i polu 504 cm^2 wycięto koło, styczne do boków tego trójkąta. Oblicz długość promienia wyciętego koła. Zadanie 2. Boki trójkąta mają długość 21 cm, 17 cm, 10 cm. Oblicz: a) pole trójkąta; b) długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt;	Zadanie 1. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest dwa razy krótsza od przeciwprostokątnej. Oblicz stosunek pola koła wpisanego w ten trójkąt do pola koła opisanego na tym trójkącie. Zadanie 2. W trójkącie, którego pole jest równe 27 cm^2, dwa boki mają długość 18 cm i 6 cm. a) Jaką miarę ma kąt zawarty między tymi bokami? b) Oblicz długość trzeciego boku trójkąta.	Zadanie 1. W trójkącie *ABC* poprowadzono środkowe *AD* oraz *CE*, które przecięły się w punkcie *M*. Wiedząc, że $\vert AD\vert \cdot \vert CE\vert = \sqrt{3}$ oraz $\vert\angle MAC\vert + \vert ACM\vert = 60^\circ$ wykaż, że pole trójkąta *ABC* wynosi 1. Zadanie 2. Wyznacz długość boku *c* trójkąta, jeśli dane są długości a, *b* dwóch jego boków oraz wiadomo, że $h_a + h_b = h_c$, gdzie h_a, h_b, h_c są długościami

c) długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie. <u>Zadanie 3.</u> W trójkącie dwa boki mają długość 12 cm i 10 cm, zaś kąt zawarty między tymi bokami ma miarę 150°. Oblicz pole tego trójkąta. <u>Zadanie 4.</u> W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość 6 cm i 8 cm. Korzystając ze wzoru na pole trójkąta oblicz odległość wierzchołka kąta prostego od przeciwprostokątnej. <u>Zadanie 5.</u> Kąt wpisany w koło ma miarę 45° i jest oparty na łuku długości 3π cm. Oblicz pole wycinka koła wyznaczonego przez ten łuk. <u>Zadanie 6.</u> Trójkąt równoboczny $A'B'C'$ jest podobny do trójkąta ABC w skali $s = 3$. Pole trójkąta ABC jest równe $4\sqrt{3}$ cm^2. Oblicz długość boku trójkąta $A'B'C'$.	c) Oblicz promień koła opisanego na tym trójkącie. Pamiętaj o rozważeniu dwóch przypadków. <u>Zadanie 3.</u> Na trójkącie ABC, w którym $\|AC\| = \|BC\|$, opisano okrąg o środku O i promieniu $R = 20$ cm. Wiedząc, że $\|\angle AOB\| = 120^\circ$, oblicz pole trójkąta oraz długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt. Rozważ dwa przypadki. <u>Zadanie 4.</u> W trójkącie równoramiennym podstawa ma 16 cm długości, a ramię ma 17 cm długości. Oblicz odległość środka wysokości poprowadzonej na podstawę trójkąta od ramienia trójkąta. <u>Zadanie 5.</u> Prosta równoległa do podstawy AB trójkąta ABC, przecinająca ramiona AC i BC odpowiednio w punktach D i E, dzieli ten trójkąt na dwie figury o równych polach. W jakim stosunku (licząc od wierzchołka C) dzieli ona ramiona trójkąta? <u>Zadanie 6.</u> W wycinek koła o promieniu 6 cm wpisano okrąg o promieniu 2 cm. Oblicz pole wycinka koła. <u>Zadanie 7.</u> W trójkącie ABC dane są: $\|\angle ACB\| = 120^\circ$, $\|AC\| = b$, $\|BC\| = a$. Wykaż, że odcinek dwusiecznej kąta ACB zawarty	wysokości opuszczonych na odpowiednie boki tego trójkąta. <u>Zadanie 3.</u> Wykaż, że okrąg wpisany w trójkąt prostokątny jest styczny do przeciwprostokątnej w punkcie dzielącym ją na dwa odcinki, których iloczyn długości jest równy polu tego trójkąta. <u>Zadanie 4.</u> Wykaż, że pole trójkąta wyraża się wzorem: $P = \frac{abc}{4R}$, gdzie a, b, c oznaczają długości boków trójkąta, R – długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie. <u>Zadanie 5.</u> W trójkącie rozwartokątnym ABC (kąt BCA jest rozwarty) długości boków wynoszą: $\|AB\| = c$, $\|AC\| = b$ oraz $\|BC\| = a$, gdzie $0 < a < b < c$. Pole tego trójkąta wynosi 3. Wykaż, że $\|AC\| > \sqrt{6}$.

	w trójkącie ma długość $\frac{a \cdot b}{a+b}$.	

8. Funkcja i jej własności

Tematyka zajęć:

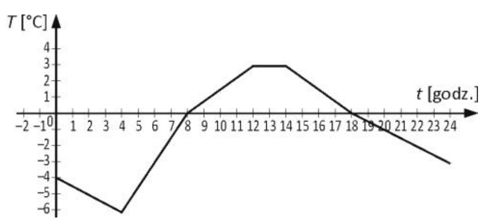
- Pojęcie funkcji. Funkcja liczbowa. Dziedzina i zbiór wartości funkcji
- Sposoby opisywania funkcji
- Wykres funkcji
- Dziedzina funkcji liczbowej
- Zbiór wartości funkcji liczbowej
- Miejsce zerowe funkcji
- **(R) Równość funkcji**
- Monotoniczność funkcji
- Funkcje różnowartościowe
- **(R) Funkcje parzyste i funkcje nieparzyste**
- **(R) Funkcje okresowe**
- **(R) Największa i najmniejsza wartość funkcji liczbowej**
- Odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu
- Szkicowanie wykresów funkcji o zadanych własnościach
- Zastosowanie wykresów funkcji do rozwiązywania równań i nierówności.
- Zastosowanie wiadomości o funkcjach do opisywania, interpretowania i przetwarzania informacji wyrażonych w postaci wykresu funkcji

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi odróżnić funkcję od innych przyporządkowań; – potrafi podawać przykłady funkcji; – potrafi opisywać funkcje na różne sposoby: wzorem, tabelką, grafem, opisem słownym; – potrafi naszkicować wykres funkcji liczbowej określonej słownie, grafem, tabelką, wzorem;	Uczeń: – potrafi określić dziedzinę funkcji liczbowej danej wzorem w przypadku, gdy wyznaczenie dziedziny funkcji wymaga rozwiązania koniunkcji warunków, dotyczących mianowników lub pierwiastków stopnia drugiego, występujących we wzorze; – potrafi obliczyć miejsca zerowe funkcji opisanej	Uczeń: – rozwiązuje zadania dotyczące funkcji o podwyższonym stopniu trudności.

– potrafi odróżnić wykres funkcji od krzywej, która wykresem funkcji nie jest; – zna wykresy funkcji, takich jak: $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$; – potrafi określić dziedzinę funkcji liczbowej danej wzorem (w prostych przypadkach); – potrafi obliczyć miejsce zerowe funkcji liczbowej (w prostych przypadkach); – potrafi obliczyć wartość funkcji liczbowej dla danego argumentu, a także obliczyć argument funkcji, gdy dana jest jej wartość; – potrafi określić zbiór wartości funkcji w prostych przypadkach (np. w przypadku, gdy dziedzina funkcji jest zbiorem skończonym); – potrafi na podstawie wykresu funkcji liczbowej odczytać jej własności, takie jak: – dziedzina funkcji – zbiór wartości funkcji – miejsce zerowe funkcji – argument funkcji, gdy dana jest wartość funkcji – wartość funkcji dla danego argumentu – przedziały, w których funkcja jest rosnąca, malejąca, stała – zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie, ujemne, niedodatnie, nieujemne – najmniejszą oraz największą wartość funkcji; – potrafi interpretować informacje na podstawie wykresów funkcji lub ich wzorów (np. dotyczące różnych zjawisk przyrodniczych, ekonomicznych, socjologicznych, fizycznych); – potrafi przetwarzać informacje dane w postaci wzoru lub wykresu funkcji; – umie na podstawie wykresów funkcji *f* i *g*	wzorem; – wie, jakie funkcje nazywamy równymi; – zna definicję funkcji parzystej oraz nieparzystej; – wie, jaką funkcję nazywamy okresową; – potrafi podać własności funkcji okresowej na podstawie jej wykresu; – potrafi zbadać na podstawie definicji, czy dane funkcje są równe; – potrafi zbadać na podstawie definicji parzystość (nieparzystość) danej funkcji; – potrafi zbadać na podstawie definicji monotoniczność danej funkcji; – potrafi udowodnić na podstawie definicji różnowartościowość danej funkcji; – potrafi wyznaczyć najmniejszą oraz największą wartość funkcji w przedziale domkniętym; – posługuje się wykresami funkcji: y = reszta z dzielenia x przez 3, gdzie $x \in \boldsymbol{C}$, $y = \mathrm{sgn}\, x$, $y = [x]$, $y = x - [x]$, $y = \max(5, \lvert x \rvert)$, $y = \min(x, 2x + 1)$; – potrafi stosować wiadomości o funkcji do opisywania zależności w przyrodzie, gospodarce i życiu codziennym; – potrafi podać opis matematyczny prostej sytuacji w postaci wzoru funkcji; – potrafi naszkicować wykres funkcji kawałkami ciągłej na podstawie wzoru tej funkcji; – potrafi na podstawie wykresu funkcji kawałkami ciągłej omówić jej własności; – potrafi naszkicować wykres funkcji o zadanych własnościach.	

podać zbiór rozwiązań równania $f(x) = g(x)$ oraz nierówności typu: $f(x) < g(x)$, $f(x) \geq g(x)$.		

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Dana jest funkcja określona za pomocą opisu słownego: *„Każdej liczbie ze zbioru* A = *{0, 1, 4, 9, 16} przyporządkowujemy pierwiastek kwadratowy tej liczby”.* Zapisz tę funkcję za pomocą wzoru, a następnie naszkicuj jej wykres w prostokątnym układzie współrzędnych. Podaj zbiór wartości tej funkcji i jej miejsce zerowe. <u>Zadanie 2.</u> Dana jest funkcja o wzorze $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{-x}}$. a) Określ dziedzinę tej funkcji. b) Czy funkcja ta posiada miejsce zerowe? Odpowiedź uzasadnij. c) Oblicz wartość funkcji dla argumentu (–9). <u>Zadanie 3.</u> Poniżej podany jest dobowy wykres temperatury.  Odpowiedz na pytania: a) W jakich godzinach dokonywano pomiaru? b) W jakim przedziale mieszczą się zanotowane	<u>Zadanie 1.</u> a) Wyznacz dziedzinę funkcji danej wzorem $f(x) = \sqrt{3-2x} + \frac{\sqrt{x+1}}{x^2-x}$. b) Wyznacz miejsce zerowe funkcji o wzorze $f(x) = \frac{\|x+2\|-1}{x^2-1}$. <u>Zadanie 2.</u> Naszkicuj wykres funkcji, której dziedziną jest przedział $\langle -6, 6\rangle$; zbiorem wartości jest przedział $\langle 1, +\infty)$; wykres funkcji jest symetryczny względem osi OY; funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle -6, 0\rangle$ oraz $f(0) = 4$. Czy istnieje tylko jedna taka funkcja? <u>Zadanie 3.</u> Naszkicuj wykres i omów własności funkcji określonej wzorem: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leq -2 \\ x^3 & \text{dla } -1 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x} & \text{dla } x > 1 \end{cases}$ a) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu $3\frac{3}{8}$. b) Dla jakiego dodatniego argumentu a zachodzi równość $f(a) = -f(-a)$? <u>Zadanie 4.</u> W pewnym kraju obowiązuje system podatkowy	<u>Zadanie 1.</u> Przedstaw funkcję określoną wzorem $f(x) = \frac{x^3+2x}{x-3}$, gdzie x $\in$ ***R*** – {– 3, 3}, w postaci sumy funkcji parzystej i nieparzystej. <u>Zadanie 2.</u> Wykaż, że funkcja określona wzorem $f(x) = \frac{3x^2+2x+3}{x^2+1}$ przyjmuje największą wartość równą 4, a najmniejszą równą 2. <u>Zadanie 3</u> Wykaż, że funkcja określona wzorem $f(x) = 3 - 2x^3$ jest a) malejąca, b) różnowartościowa.

temperatury?
c) W jakich godzinach temperatura wyniosła 0°?
d) W jakich godzinach temperatura była dodatnia, a w jakich ujemna?
e) W jakich godzinach temperatura rosła, a w jakich malała?
f) Jaką wartość miała temperatura w godzinach $\langle 12, 14\rangle$?
g) Jaką najniższą wartość wskazał termograf?

Zadanie 4.
Odległość d [km] ustalonego kolarza peletonu od mety w zależności od czasu jazdy t [h] (od chwili rozpoczęcia wyścigu do chwili przejechania mety) opisuje wzór:
$d(t) = 180 - 45t$.
a) Ile godzin potrzeba, aby kolarz przejechał linię mety wyścigu?
b) W jakiej odległości od mety będzie znajdował się kolarz po 40 minutach jazdy?
c) Po jakim czasie od startu kolarz będzie znajdował się 30 km od mety?
d) Jaką długość ma etap wyścigu?

Zadanie 5.
Na podstawie wykresów odpowiednich funkcji rozwiąż:
a) równanie $x^2 = x$
b) nierówność $\frac{1}{x} > x^3$.

opisany wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ dla } 0 \le x \le 800 \\ 0{,}05x - 40 \text{ dla } 800 < x \le 2000 \\ 0{,}2x - 340 \text{ dla } x > 2000 \end{cases}$$

gdzie x – oznacza wysokość dochodów rocznych podatnika w dolarach, zaś $f(x)$ oznacza wysokość podatku, jaki zobowiązany jest zapłacić podatnik. Oblicz, który z podatników zapłaci większy podatek i o ile procent większy, jeśli dochód roczny pierwszego z nich wyniósł 1260 USD, zaś drugiego 3480 USD. Wynik podaj z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

Zadanie 5.
Wykaż na podstawie definicji, że funkcja określona wzorem:
a) $f(x) = x^2 - 2x$ jest rosnąca w zbiorze $(1, +\infty)$;
b) $f(x)= \frac{x-1}{x+4}$ jest różnowartościowa;
c) $f(x) = \frac{4x^4 - 5x^2}{x^2 - 1}$ jest parzysta.

Zadanie 6.
Wyznacz najmniejszą oraz największą wartość funkcji $f(x) = (2x - 3)^2$ w przedziale $\langle -4, 6\rangle$.

9. Przekształcenia wykresów funkcji

Tematyka zajęć:

- Podstawowe informacje o wektorze w układzie współrzędnych
- Przesunięcie równoległe o wektor $\vec{u}$ = [*p*, *q*]
- Symetria osiowa względem osi *OX* i osi *OY*
- Symetria środkowa względem punktu (0, 0)
- **(R) Wykres funkcji *y* = |*f*(*x*)| oraz *y* = *f*(|*x*|)**
- **(R) Powinowactwo prostokątne o osi *OX* i o osi *OY***
- **(R) Szkicowanie wykresów wybranych funkcji**
- **(R) Zastosowanie wykresów funkcji do rozwiązywania zadań**

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna określenie wektora i potrafi podać jego cechy; – potrafi obliczyć współrzędne wektora, mając dane współrzędne początku i końca wektora; – potrafi obliczyć współrzędne początku wektora (końca wektora), gdy dane ma współrzędne wektora oraz współrzędne końca (początku) wektora; – potrafi wyznaczyć długość wektora (odległość między punktami na płaszczyźnie kartezjańskiej); – zna określenie wektorów równych i wektorów przeciwnych oraz potrafi stosować własności tych wektorów przy rozwiązywaniu zadań; – potrafi wykonywać działania na wektorach: dodawanie, odejmowanie oraz mnożenie przez liczbę (analitycznie); – potrafi obliczyć współrzędne środka odcinka; – potrafi podać współrzędne punktu, który jest obrazem danego punktu w symetrii osiowej	Uczeń: – zna własności działań na wektorach i potrafi je stosować w rozwiązywaniu zadań o średnim stopniu trudności; – potrafi na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ sporządzić wykresy funkcji: $y = \|f(x)\|$, $y = f(\|x\|)$, $y = k \cdot f(x)$, $k \neq 0$ oraz $y = f(k \cdot x)$, $k \neq 0$; – potrafi naszkicować wykres funkcji, którego sporządzenie wymaga kilku poznanych przekształceń; – potrafi przeprowadzić dyskusję rozwiązań równania z parametrem $f(x) = m$, w oparciu o wykres funkcji *f*; – potrafi stosować własności przekształceń geometrycznych przy rozwiązywaniu zadań o średnim stopniu trudności.	Uczeń: – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania (o podwyższonym stopniu trudności), dotyczące przekształceń wykresów funkcji oraz własności funkcji.

względem osi *OX* oraz osi *OY*; – potrafi podać współrzędne punktu, który jest obrazem danego punktu w symetrii środkowej względem punktu (0,0); – potrafi podać współrzędne punktu, który jest obrazem danego punktu w przesunięciu równoległym o dany wektor; – potrafi narysować wykres funkcji $y = f(x) + q$, $y = f(x - p)$, $y = f(x - p) + q$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$ oraz $y = -f(-x)$ w przypadku, gdy dany jest wykres funkcji $y = f(x)$; (potrafi narysować wykresy funkcji określonych wzorami, np.: $y = (x + 3)^2$; $y = \sqrt{x} - 4$; $y = -\frac{1}{x}$; $y = (x - 1)^2 - 5$, $y = -\sqrt{-x}$, $y = \frac{1}{x-2} + 3$); – – umie podać własności funkcji: $y = f(x) + q$, $y = f(x - p)$, $y = f(x - p) + q$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, – $y = -f(-x)$ w oparciu o dane własności funkcji $y = f(x)$; – potrafi zapisać wzór funkcji, której wykres otrzymano w wyniku przekształcenia wykresu funkcji *f* przez symetrię osiową względem osi *OX*, symetrię osiową względem osi *OY*, symetrię środkową względem początku układu współrzędnych, przesunięcie równoległe o dany wektor.		

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Dane są punkty: $A(2, 5)$, $B(-4, 6)$. a) Wyznacz współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$. b) Oblicz długość wektora $\overrightarrow{AB}$.	<u>Zadanie 1.</u> Dany jest odcinek o końcach $A(2, -5)$, $B(-4, 7)$. Wyznacz współrzędne punktu *P*, który dzieli odcinek *AB* w taki sposób, że $\frac{\vert PB\vert}{\vert AB\vert} = \frac{1}{3}$.	<u>Zadanie 1.</u> W jaki sposób przekształcić wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$, aby otrzymać wykres funkcji

c) Wyznacz współrzędne środka odcinka AB.

Zadanie 2.

Dane są wektory: $\vec{a} = [1, -1]$, $\vec{b} = [2, -1]$, $\vec{c} = [-5, -7]$. Wyznacz takie liczby rzeczywiste k, l, aby $k \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{b} = \vec{c}$.

Zadanie 3.

W prostokątnym układzie współrzędnych narysuj odcinek AB, gdzie $A(-2, 4)$, $B(-5, -3)$, a następnie wyznacz współrzędne końców obrazu tego odcinka:

a) w symetrii względem osi OX
b) w symetrii względem osi OY
c) w symetrii względem początku układu współrzędnych
d) w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u} = [1, -3]$.

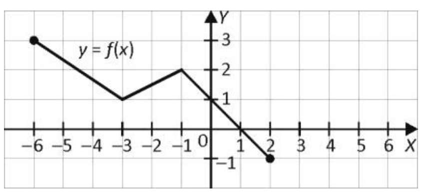
Zadanie 4.

Dana jest funkcja $f(x) = x^3$. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $y = x^3 + 2$; b) $y = (x + 1)^3$; c) $y = -x^3$;
d) $y = (x - 1)^3 - 4$.

Zadanie 5.

Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$.



a) Napisz wzór funkcji g, której wykres powstanie

Zadanie 2.

O jaki wektor należy przesunąć równolegle wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x} - 3$, aby otrzymać wykres funkcji:

a) $g(x) = \sqrt{x} + 1$
b) $h(x) = \sqrt{x+2}$?

Zadanie 3.

Dana jest funkcja $g(x) = 2x - 6$. Jej wykres powstał w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych. Wyznacz wzór funkcji f.

Zadanie 4.

Na podstawie wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ naszkicuj wykresy funkcji:

a) $y = 3 - \sqrt{x+2}$
b) $y = \sqrt{-x+2} + 1$
c) $y = |\sqrt{x} - 4|$
d) $y = \frac{1}{4}\sqrt{|x|}$

Zadanie 5.

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |x - 2|$. Na podstawie wykresu tej funkcji rozwiąż:

a) równania: $|x - 2| = 3$; $|x - 2| = x$
b) nierówności: $|x - 2| \leq 2$; $|x - 2| > x^2$.

Zadanie 6.

Funkcja $y = f(x)$ jest określona w zbiorze $\boldsymbol{R}$ i jest okresowa o okresie podstawowym równym 6.

$g(x) = \frac{1}{4x-3} + 2$?

Zadanie 2.

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x} - 1$, a następnie na jego podstawie, sporządź wykres funkcji $g(x) = 4 - f(|-x + 1|)$. Podaj wzór funkcji g.

Zadanie 3.

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \frac{2}{|x|-1}$,

a następnie:

a) podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji g
b) podaj przedziały monotoniczności funkcji g
c) wykaż, że funkcja g jest parzysta
d) podaj zbiór rozwiązań nierówności $\frac{2}{|x|-1} \geq |x|$.

Zadanie 4.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $|3 - |x - 2|| = m + 7$ ma więcej rozwiązań dodatnich niż ujemnych.

w wyniku przesunięcia wykresu funkcji *f* wzdłuż osi *OX* o 4 jednostki w prawo. Jakie miejsca zerowe ma funkcja *g*? b) Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji *h*, której wykres otrzymamy w wyniku przekształcenia wykresu funkcji *f* w symetrii względem osi *OX*.	Wyznacz okres podstawowy funkcji $g(x) = f(\frac{2}{3}x)$. <u>Zadanie 7.</u> W oparciu o wykres odpowiedniej funkcji podaj liczbę rozwiązań równania, w zależności od wartości parametru *m*: a) $\lvert x - 5\rvert - 2 = m$ b) $\left\lvert \frac{1}{x} - 2 \right\rvert = m + 4$.	

10. Funkcja liniowa

Tematyka zajęć:

- Proporcjonalność prosta
- Funkcja liniowa. Wykres funkcji liniowej
- Miejsce zerowe funkcji liniowej. Własności funkcji liniowej
- Znaczenie współczynników we wzorze funkcji liniowej
- Równoległość i prostopadłość wykresów funkcji liniowych o współczynnikach kierunkowych różnych od zera
- Zastosowanie wiadomości o funkcji liniowej w zadaniach z życia codziennego
- Równanie liniowe i nierówność liniowa z jedną niewiadomą
- Równania i nierówności z wartością bezwzględną
- Równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi
- Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi
- Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi z parametrem
- Zastosowanie układów równań liniowych do rozwiązywania zadań tekstowych
- Nierówność pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi i jej interpretacja geometryczna. Układy nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi
- Zastosowanie układów nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi do rozwiązywania zadań

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – wie, jaką zależność między dwiema wielkościami zmiennymi nazywamy proporcjonalnością prostą; – potrafi wskazać współczynnik proporcjonalności; – rozwiązuje zadania tekstowe z zastosowaniem proporcjonalności prostej; – zna pojęcie funkcji liniowej; – potrafi interpretować współczynniki we wzorze funkcji liniowej; – potrafi sporządzić wykres funkcji liniowej danej wzorem;	Uczeń: – potrafi udowodnić, na podstawie definicji, niektóre własności funkcji liniowej, takie jak: monotoniczność, różnowartościowość itp.; – potrafi przeprowadzić dowód warunku na prostopadłość wykresów funkcji liniowych o współczynnikach różnych od zera; – potrafi rozwiązywać zadania z wartością bezwzględną i parametrem dotyczące własności funkcji liniowej; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności liniowe z wartością bezwzględną i interpretować	Uczeń: – rozwiązuje zadania nietypowe o podwyższonym stopniu trudności.

– potrafi na podstawie wykresu funkcji liniowej (wzoru funkcji) określić monotoniczność funkcji; – potrafi wyznaczyć algebraicznie i graficznie zbiór tych argumentów, dla których funkcja liniowa przyjmuje wartości dodatnie (ujemne, niedodatnie, nieujemne); – potrafi sprawdzić algebraicznie, czy punkt o danych współrzędnych należy do wykresu funkcji liniowej; – potrafi podać własności funkcji liniowej na podstawie wykresu tej funkcji; – wie, że współczynnik kierunkowy *a* we wzorze funkcji $y = ax + b$ oznacza tangens kąta nachylenia wykresu funkcji liniowej do osi *OX*; – wie, że współczynnik kierunkowy *a* we wzorze funkcji liniowej $y = ax + b$ wyraża się wzorem $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, gdzie $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ są punktami należącymi do wykresu tej funkcji; – potrafi znaleźć wzór funkcji liniowej o zadanych własnościach (np. takiej, której wykres przechodzi przez dwa dane punkty; jest nachylony do osi *OX* pod danym kątem i przechodzi przez dany punkt); – potrafi napisać wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie; – potrafi naszkicować wykres funkcji kawałkami liniowej i na jego podstawie omówić własności danej funkcji; – potrafi wyznaczyć algebraicznie miejsca zerowe funkcji kawałkami liniowej oraz współrzędne	je graficznie; – potrafi przeprowadzić dyskusję liczby rozwiązań równania liniowego z parametrem (z dwoma parametrami); – potrafi wyznaczyć wszystkie wartości parametru, dla których zbiorem rozwiązań nierówności liniowej z parametrem, jest podany zbiór; – potrafi rozwiązywać układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi metodą wyznacznikową; – potrafi przeprowadzić dyskusję liczby rozwiązań układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi z parametrem, stosując metodę wyznacznikową; – potrafi rozwiązać układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi z wartością bezwzględną oraz zinterpretować go graficznie; – potrafi wykreślać w prostokątnym układzie współrzędnych zbiory punktów opisane równaniem, nierównością, układem równań lub układem nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi z wartością bezwzględną; – potrafi stosować wiedzę o układach nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi do rozwiązywania zadań („programowanie liniowe”).	

punktu wspólnego wykresu funkcji i osi *OY*; – potrafi wyznaczyć algebraicznie zbiór tych argumentów, dla których funkcja kawałkami liniowa przyjmuje wartości dodatnie (ujemne); – potrafi obliczyć wartość funkcji kawałkami liniowej dla podanego argumentu; – potrafi napisać wzór funkcji liniowej, której wykres jest równoległy do wykresu danej funkcji liniowej i przechodzi przez punkt o danych współrzędnych; – potrafi napisać wzór funkcji liniowej, której wykres jest prostopadły do wykresu danej funkcji liniowej i przechodzi przez punkt o danych współrzędnych; – potrafi określić, na podstawie wzorów dwóch funkcji liniowych, wzajemne położenie ich wykresów; – potrafi stosować wiadomości o funkcji liniowej do opisu zjawisk z życia codziennego (podać opis matematyczny zjawiska w postaci wzoru funkcji liniowej, odczytać informacje z wykresu lub wzoru, zinterpretować je, przeanalizować i przetworzyć); – potrafi rozwiązać równanie liniowe z jedną niewiadomą; – potrafi rozwiązać nierówność liniową z jedną niewiadomą i przedstawić jej zbiór rozwiązań na osi liczbowej; – potrafi rozwiązać układ nierówności liniowych z jedną niewiadomą; – potrafi interpretować graficznie równania		

i nierówności liniowe z jedną niewiadomą; – potrafi rozwiązywać algebraicznie proste równania i nierówności z wartością bezwzględną i interpretować je graficznie np. $\|\|x-2\|-1\|=3$, $\|x+4\|>2x+3$; – zna pojęcia równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi; – wie, że wykresem równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi jest prosta; – zna pojęcie układu dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi; – potrafi rozpoznać układ oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny i umie podać ich interpretację geometryczną; – potrafi rozwiązywać algebraicznie (metodą przez podstawienie oraz metodą przeciwnych współczynników) układy dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi; – potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do układów równań liniowych; – zna pojęcie nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi i potrafi interpretować geometrycznie taką nierówność; – potrafi przedstawić na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych, zbiór tych wszystkich punktów, których współrzędne spełniają dany układ nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi; – potrafi opisać daną figurę geometryczną (np. kąt, trójkąt, czworokąt) przedstawioną w prostokątnym układzie współrzędnych, za		

pomocą odpowiedniego układu nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi;		

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} x+2 \text{ dla } x \in (-\infty, -1) \\ -x \text{ dla } x \in \langle -1, 1 \rangle \\ x-2 \text{ dla } x \in (1, +\infty) \end{cases}$. a) Oblicz miejsca zerowe funkcji *f* oraz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji *f* i osi OY. b) Wyznacz algebraicznie zbiór tych argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości nieujemne. c) Oblicz wartość funkcji *f* dla argumentu 6. d) Naszkicuj wykres funkcji $y = f(x)$ i na jego podstawie naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(-x)$; omów własności funkcji $y = g(x)$. <u>Zadanie 2.</u> a) Napisz wzór funkcji liniowej *f*, wiedząc, że jej wykres przechodzi przez punkt $A(-\sqrt{3}, -2)$ i jest nachylony do osi *OX* pod kątem 120°. b) Napisz wzór funkcji liniowej *g*, której miejscem zerowym jest liczba 4 i której wykres jest prostopadły do wykresu funkcji *f*. <u>Zadanie 3.</u>	<u>Zadanie 1.</u> Wyznacz te wartości parametru *m*, dla których funkcja liniowa $f(x) = (\|m-3\| - 5)x - m + 10$ jest rosnąca i nieparzysta. <u>Zadanie 2.</u> Wyznacz wszystkie wartości parametru *k*, dla których zbiorem rozwiązań nierówności liniowej $(4-k^2)x + 1 + k > 0$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. <u>Zadanie 3.</u> Rozwiąż nierówność: $\sqrt{x^2+4x+4} - \|2x-5\| \geq x + 7$. <u>Zadanie 4.</u> Dla jakich wartości parametru *m* ($m \in \boldsymbol{R}$) układ równań z niewiadomymi *x* i *y* $\begin{cases} x - my = m \\ mx - y = 2 \end{cases}$ jest oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny? W przypadku istnienia rozwiązań, wyznacz je. <u>Zadanie 5.</u> Wyznacz zbiór tych punktów płaszczyzny, których	<u>Zadanie 1.</u> Wyznacz wzór funkcji liniowej *f*, która dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$ spełnia warunek: $f(2x-1) = -6x + 4$. <u>Zadanie 2.</u> Funkcję $y = \text{sgn}(a)$ (co oznacza znak liczby *a*), definiujemy następująco: $\text{sgn}(a) = \begin{cases} 1 \text{ dla } a > 0 \\ 0 \text{ dla } a = 0 \\ -1 \text{ dla } a < 0 \end{cases}$ Na podstawie powyższej definicji naszkicuj wykres funkcji: $f(x) = -2\text{sgn}(-3x+1) + 5$.

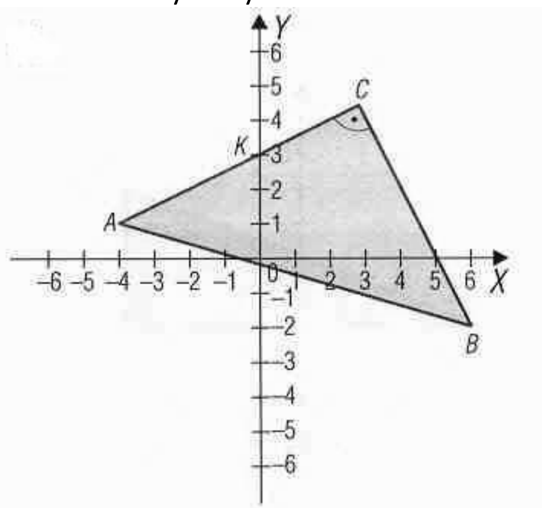
Rozwiąż nierówność $\sqrt{5}x > 4x - 1$.

<u>Zadanie 4.</u>

Klub sportowy przeznaczył na kupno 28 dresów kwotę w wysokości 2860 zł. Zamierza kupić dresy w dwóch gatunkach. Jaką liczbę dresów pierwszego gatunku może kupić ten klub, jeśli wiadomo, że dres pierwszego gatunku kosztuje 125 zł, a dres drugiego gatunku 80 zł?

<u>Zadanie 5.</u>

Opisz za pomocą układu nierówności zbiór przedstawiony na rysunku.



Dane: $A(-4,\ 1)$, $K(0,\ 3)$

$B(6,\ -2)$, $|\sphericalangle ACB| = 90^\circ$

współrzędne spełniają układ nierówności

$$\begin{cases} |x| - |y| \leq 2 \\ |x| \leq 4 \end{cases}.$$

<u>Zadanie 6.</u>

Mały zakład włókienniczy produkuje dwa rodzaje swetrów (damskie i męskie) z dwóch rodzajów wełny (czarnej i białej). Do produkcji jednego swetra damskiego potrzeba 20 dag wełny czarnej i 40 dag wełny białej, a do produkcji swetra męskiego — 60 dag wełny czarnej i 20 dag wełny białej. Zasoby wełny czarnej wynoszą 120 kg, natomiast białej 140 kg. Zysk osiągany ze sprzedaży swetra męskiego wynosi 38 zł, a ze sprzedaży swetra dla pań — 44 zł. Ile i jakie swetry powinien wyprodukować ten zakład, aby osiągnąć jak największy zysk?

11. Funkcja kwadratowa

Tematyka zajęć:

- Własności funkcji kwadratowej $y = ax^2$
- Wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej
- Związek między wzorem funkcji kwadratowej w postaci ogólnej a wzorem funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej
- Miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej
- Szkicowanie wykresów funkcji kwadratowych. Odczytywanie własności funkcji kwadratowej na podstawie wykresu
- Najmniejsza oraz największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym
- Badanie funkcji kwadratowej – zadania optymalizacyjne
- Równania kwadratowe
- Równania prowadzące do równań kwadratowych
- Nierówności kwadratowe
- * Równania i nierówności, w których niewiadoma występuje pod znakiem pierwiastka kwadratowego
- Zadania prowadzące do równań i nierówności kwadratowych
- Wzory Viète’a
- Równania i nierówności kwadratowe z parametrem
- Wykres funkcji kwadratowej z wartością bezwzględną
- Równania i nierówności kwadratowe z wartością bezwzględną
- Równania kwadratowe z wartością bezwzględną i parametrem

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi naszkicować wykres funkcji kwadratowej określonej wzorem $y = ax^2$, gdzie $a \neq 0$, oraz omówić jej własności na podstawie wykresu; – zna wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej $y= ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$; – zna wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej $y = a(x - p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$;	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania z parametrem o podwyższonym stopniu trudności dotyczące własności funkcji kwadratowej; – potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie dotyczące własności funkcji kwadratowej; – potrafi rozwiązywać równania kwadratowe z wartością bezwzględną i parametrem;	Uczeń – potrafi wyprowadzić wzory na miejsca zerowe funkcji kwadratowej; – potrafi wyprowadzić wzory na współrzędne wierzchołka paraboli; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności, w których niewiadoma występuje pod znakiem

– zna wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie $a \neq 0$; – zna wzory pozwalające obliczyć: wyróżnik funkcji kwadratowej, współrzędne wierzchołka paraboli, miejsca zerowe funkcji kwadratowej (o ile istnieją); – potrafi obliczyć miejsca zerowe funkcji kwadratowej lub uzasadnić, że funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych; – potrafi obliczyć współrzędne wierzchołka paraboli na podstawie poznanego wzoru oraz na podstawie znajomości miejsc zerowych funkcji kwadratowej; – potrafi sprawnie zamieniać wzór funkcji kwadratowej (wzór w postaci kanonicznej na wzór w postaci ogólnej i odwrotnie, wzór w postaci iloczynowej na wzór w postaci kanonicznej itp.); – interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje); – potrafi podać niektóre własności funkcji kwadratowej (bez szkicowania jej wykresu) na podstawie wzoru funkcji w postaci kanonicznej (np. przedziały monotoniczności funkcji, równanie osi symetrii paraboli, zbiór wartości funkcji) oraz na podstawie wzoru funkcji w postaci iloczynowej (np. zbiór tych argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie czy ujemne);	– potrafi rozwiązywać zadania optymalizacyjne.	pierwiastka kwadratowego; – potrafi rozwiązywać różne problemy dotyczące funkcji kwadratowej, które wymagają niestandardowych metod pracy oraz niekonwencjonalnych pomysłów.

– potrafi naszkicować wykres dowolnej funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru; – potrafi na podstawie wykresu funkcji kwadratowej omówić jej własności; – potrafi napisać wzór funkcji kwadratowej o zadanych własnościach; – potrafi napisać wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o jej wykresie; – potrafi wyznaczyć najmniejszą oraz największą wartość funkcji kwadratowej w danym przedziale domkniętym; – potrafi zastosować własności funkcji kwadratowej do rozwiązywania prostych zadania optymalizacyjnych; – potrafi algebraicznie rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą; – potrafi graficznie rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą; – potrafi rozwiązywać zadania prowadzące do równań i nierówności kwadratowych z jedną niewiadomą (w tym także zadania geometryczne); – potrafi rozwiązywać równania z niewiadomą występującą pod znakiem pierwiastka stopnia parzystego, które można sprowadzić do równań kwadratowych; – potrafi rozwiązywać proste zadania z parametrem, w których jest mowa o własnościach funkcji kwadratowej; – potrafi przeanalizować zjawisko z życia codziennego opisane wzorem (wykresem) funkcji kwadratowej;		

– potrafi opisać dane zjawisko za pomocą wzoru funkcji kwadratowej; – zna wzory Viète'a i ich zastosowanie; – potrafi przekształcać wyrażenia, tak by można było obliczać ich wartości, stosując wzory Viète'a; – potrafi przekształcać wykresy funkcji kwadratowych, stosując poznane w klasie pierwszej przekształcenia, oraz napisać wzór funkcji, której wykres otrzymano w danym przekształceniu; – potrafi szkicować wykres funkcji kwadratowej z wartością bezwzględną; – potrafi rozwiązywać proste równania i nierówności kwadratowe z wartością bezwzględną; – potrafi rozwiązywać proste równania i nierówności kwadratowe z parametrem.		

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Funkcja kwadratowa f dana jest wzorem w postaci kanonicznej $f(x) = -2(x + 3)^2 + 8$. Podaj wzór funkcji f w postaci iloczynowej i ogólnej. Naszkicuj wykres funkcji f i na jego podstawie omów własności funkcji. <u>Zadanie 2.</u> Funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 + bx + c$ jest malejąca	<u>Zadanie 1.</u> Zbadaj, na podstawie definicji, monotoniczność funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + 6x$, w przedziale $(-\infty; 3)$. <u>Zadanie 2.</u> Dla jakich wartości parametru m miejsca zerowe x_1, x_2 funkcji f o wzorze $f(x) = x^2 - 4(m + 1)x + 2m(m - 1)$	<u>Zadanie 1.</u> Wyznacz równania kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ o współczynnikach całkowitych a, b, c, gdzie $a \in \boldsymbol{C} - \{0\}$, z których każde ma dwa różne rozwiązania: $x_1 = a$, $x_2 = b$. <u>Zadanie 2.</u> Rozwiąż nierówność

w przedziale $(-\infty, 1\rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle 1, +\infty)$. Wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji f należy do prostej k: $y = 4x - 8$.

a) Wyznacz współczynniki b oraz c.

b) Oblicz miejsca zerowe funkcji f.

c) Rozwiąż nierówność $f(x) \leq 4x - 8$.

Zadanie 3.

Wyznacz współczynniki b i c we wzorze funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + bx + c$, wiedząc, że jej miejsca zerowe spełniają warunek:

$x_1 = 3$ i $x_1 + x_2 = 10$.

Zadanie 4.

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |x^2 - 4x|$ i na jego podstawie ustal liczbę rozwiązań równania $|x^2 - 4x| = m$, gdzie m jest parametrem i $m \in \boldsymbol{R}$.

Zadanie 5.

Dla jakich wartości parametru k ($k \in \boldsymbol{R}$) zbiorem rozwiązań nierówności $(k^2 - 1)x^2 + (k+1)x + 3 > 0$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych?

Zadanie 6.

Rozwiąż równanie $x^2 = 4\sqrt{x^2+1} - 5$.

Zadanie 7.

Drut mający długość 2 m podzielono na dwie części: z jednej zrobiono kwadratową ramkę, a z drugiej ramkę prostokątną, w której jeden bok prostokąta ma długość 3 razy większą od długości drugiego boku.

spełniają warunek $x_1 < m < x_2$?

Zadanie 3.

Długości boków pewnego trójkąta są kolejnymi liczbami naturalnymi dodatnimi. Cosinus kąta leżącego pomiędzy dłuższymi bokami jest równy 0,75. Wyznacz długości boków tego trójkąta i oblicz jego pole.

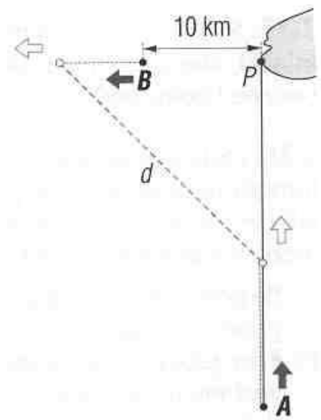
Zadanie 4.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m ($m \in \boldsymbol{R}$) tak, aby równanie $x^2 - (m-3) \cdot |x| + m = 0$ miało dwa różne rozwiązania.

Zadanie 5.

O godzinie 13^{00} statek B płynący na zachód ze stałą prędkością 20 km/h znajduje się w odległości 10 km od portu, zaś statek A płynący na północ ze stałą prędkością 40 km/h znajduje się w odległości od portu 6 razy większej niż statek B.

$\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} > \sqrt{2x-5}$.

Jak należy podzielić drut, aby suma pól kwadratu i prostokąta była najmniejsza?	 O której godzinie odległość między statkami będzie najmniejsza?	

12. Geometria płaska – czworokąty

Tematyka zajęć:

- Podział czworokątów. Trapezoidy
- Trapezy
- Równoległoboki
- Okrąg opisany na czworokącie
- Okrąg wpisany w czworokąt
- Okrąg opisany na czworokącie, okrąg wpisany w czworokąt – zadania na dowodzenie
- Podobieństwo. Figury podobne
- Podobieństwo czworokątów

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna podział czworokątów; – potrafi wyróżnić wśród trapezów: trapezy prostokątne i trapezy równoramienne; poprawnie posługuje się takimi określeniami, jak: podstawa, ramię, wysokość trapezu; – wie, że suma kątów przy każdym ramieniu trapezu jest równa 180° i umie tę własność wykorzystać w rozwiązywaniu prostych zadań; – zna twierdzenie o odcinku łączącym środki ramion trapezu i umie zastosować je w rozwiązywaniu prostych zadań; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące własności trapezów; – zna podstawowe własności równoległoboków i umie je stosować w rozwiązywaniu prostych zadań; – wie, jakie własności ma romb;	Uczeń: – umie na podstawie własności czworokąta podanych w zadaniu wywnioskować, jaki to jest czworokąt; – umie udowodnić twierdzenie o odcinku łączącym środki ramion trapezu; – potrafi udowodnić twierdzenie o odcinku łączącym środki przekątnych trapezu; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące czworokątów, w tym trapezów i równoległoboków; – potrafi stosować twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie, w rozwiązywaniu złożonych zadań o średnim stopniu trudności; – potrafi zastosować twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie do rozwiązania zadań o średnim	Uczeń: – umie udowodnić twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie; – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące czworokątów, czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu, korzystając przy tym z wcześniej poznanych twierdzeń.

– zna własności prostokąta i kwadratu; – wie, co to są trapezoidy, potrafi podać przykłady takich figur; – zna własności deltoidu; – rozumie, co to znaczy, że czworokąt jest wpisany w okrąg, czworokąt jest opisany na okręgu; – zna warunki, jakie musi spełniać czworokąt, aby można było okrąg wpisać w czworokąt oraz aby można było okrąg opisać na czworokącie; potrafi zastosować te warunki w rozwiązywaniu prostych zadań; – potrafi wymienić nazwy czworokątów, w które można wpisać, i nazwy czworokątów, na których można opisać okrąg; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące trapezów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu, w tym również z wykorzystaniem wcześniej poznanych własności trapezu; – korzysta z wcześniej zdobytej wiedzy do rozwiązywania zadań dotyczących czworokątów (trygonometria, twierdzenie Talesa, twierdzenie Pitagorasa, własności trójkątów itp.); – zna i rozumie definicję podobieństwa; – potrafi wskazać figury podobne; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące podobieństwa czworokątów.	stopniu trudności dotyczących trapezów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu; – potrafi wyprowadzić wzór na pole czworokąta opisanego na okręgu w zależności od długości promienia okręgu i obwodu tego czworokąta; – korzysta z wcześniej poznanych twierdzeń (np. twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów) do rozwiązywania zadań dotyczących czworokątów.	

Przykładowe zadania

Zadanie 1.	Zadanie 1.	Zadanie 1.

Z kawałka materiału mającego kształt trapezu prostokątnego o podstawach długości 1,2 m i 0,4 m oraz wysokości 1,5 m wycięto chorągiewkę w kształcie trójkąta równoramiennego, którego podstawą jest dłuższe ramię trapezu, a jeden z wierzchołków należy do krótszego ramienia trapezu. a) Wyznacz długości odcinków, na jakie ten wierzchołek podzielił krótsze ramię trapezu. b) Oblicz długości boków chorągiewki. Wyniki podaj z dokładnością do 0,01 m. <u>Zadanie 2.</u> W równoległoboku *ABCD* wysokość *DE* o długości 8 cm dzieli bok *AB* na odcinki długości: $\lvert AE \rvert = 4{,}5$ cm, $\lvert EB \rvert = 6$ cm. Oblicz długości przekątnych tego równoległoboku. <u>Zadanie 3.</u> Odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość 8 cm. Wiedząc, że w ten trapez można wpisać okrąg, oblicz obwód trapezu. <u>Zadanie 4.</u> W równoległoboku *ABCD* bok *AB* jest dwa razy dłuższy od boku *AD*. Na boku *AB* zaznaczono punkt *K*, a na boku *DC* – punkt *L* w taki sposób, że czworokąt *AKLD* jest podobny do równoległoboku *ABCD*. Wyznacz skalę tego podobieństwa. Oblicz stosunek $\lvert AK \rvert : \lvert KB \rvert$.	Uzasadnij, że odcinek łączący środki przekątnych dowolnego trapezu jest równoległy do podstaw i jego długość jest równa połowie różnicy długości podstaw. <u>Zadanie 2.</u> Wykaż, że środki przekątnych trapezoidu i środki dwóch przeciwległych jego boków są wierzchołkami równoległoboku. <u>Zadanie 3.</u> W trapez *ABCD*, $AB \parallel CD$, wpisano okrąg o środku *O*. Uzasadnij, że $\lvert \angle BOC \rvert = 90^\circ$. <u>Zadanie 4.</u> W trapezie równoramiennym jedna z podstaw jest trzy razy dłuższa od drugiej, a długość drugiej podstawy jest połową długości ramienia. Wykaż, że w ten trapez można wpisać okrąg.	W danym okręgu punkt *A* jest środkiem łuku *BC*, a dwie dowolne cięciwy *AD*, *AE* przecinają cięciwę *BC* w punktach B_1 i C_1. Wykaż, że wówczas na czworokącie B_1C_1ED można opisać okrąg.

13. Geometria płaska – pole czworokąta

Tematyka zajęć:

- Pole prostokąta. Pole kwadratu
- Pole równoległoboku. Pole rombu
- Pole trapezu
- Pole czworokąta – zadania różne
- Pola figur podobnych
- Mapa. Skala mapy

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi zastosować wzory na pole kwadratu i prostokąta w rozwiązaniach prostych zadań; – zna wzory na pole równoległoboku; potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące równoległoboków, wykorzystując wzór na jego pole i poznane wcześniej twierdzenia; – zna wzory na pole rombu; potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące rombów, wykorzystując wzory na jego pole i poznane wcześniej twierdzenia; – zna wzór na pole trapezu; potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące trapezów, wykorzystując wzór na jego pole i poznane wcześniej twierdzenia; – potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące czworokątów, wykorzystując wzory na ich pola i poznane	Uczeń: – potrafi wyprowadzić wzór na pole równoległoboku; – potrafi wyprowadzić wzory na pole rombu; – potrafi wyprowadzić wzór na pole trapezu; – potrafi rozwiązywać zadania geometryczne o średnim stopniu trudności, wykorzystując wzory na pola trójkątów i czworokątów, w tym również z wykorzystaniem wcześniej poznanych twierdzeń (np. twierdzenia sinusów i cosinusów, twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt i opisanym na czworokącie).	Uczeń: – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania geometryczne o podwyższonym stopniu trudności z wykorzystaniem wzorów na pola figur i innych twierdzeń.

wcześniej twierdzenia, w szczególności twierdzenie Pitagorasa oraz twierdzenie o okręgu wpisanym w czworokąt i opisanym na czworokącie; – zna związek między polami figur podobnych i potrafi korzystać z tego związku, rozwiązując zadania geometryczne o niewielkim stopniu trudności.		

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Przekątna kwadratu jest o 2 cm dłuższa od boku tego kwadratu. Oblicz pole kwadratu. <u>Zadanie 2.</u> Oblicz pole równoległoboku, którego przekątne długości 13 cm i 8 cm przecinają się pod kątem 60°. <u>Zadanie 3.</u> W równoległoboku *ABCD* przekątne *AC* i *DB* przecinają się w punkcie *S*. a) Wykaż, że pole równoległoboku *ABCD* jest cztery razy większe od pola trójkąta *ASD*. b) Wiedząc dodatkowo, że pole trójkąta *ASD* jest o 15 cm^2 mniejsze od pola równoległoboku *ABCD*, oblicz pole tego równoległoboku. <u>Zadanie 4.</u>	<u>Zadanie 1.</u> W równoległobok o krótszym boku długości 5 dm wpisano dwa jednakowe koła o promieniu długości 2 dm, każde styczne do trzech boków równoległoboku i styczne do siebie. Oblicz obwód i pole równoległoboku. <u>Zadanie 2.</u> Romb o boku długości 18 cm podzielono na trzy części o równych polach prostymi przechodzącymi przez wierzchołek kąta ostrego. Oblicz długości odcinków, na jakie te proste podzieliły boki rombu. <u>Zadanie 3.</u> Pola trójkątów, których podstawami są podstawy trapezu, a wspólnym wierzchołkiem jest punkt przecięcia się przekątnych tego trapezu, są równe P_1 i P_2. Oblicz pole trapezu.	<u>Zadanie 1.</u> W równoległoboku *ABCD* są dane: $\|AB\| = 18$, $\|BC\| = 10$ oraz $\|\angle ABC\| = 120°$. Punkt *K* należy do boku *AB* i $\|AK\| = 12$. Punkt *L* jest środkiem boku *BC*. Proste *CK* i *DL* przecinają się w punkcie *M*. Oblicz pole czworokąta *KBLM*.

Przekątne rombu mają długość 10 cm i 24 cm. Oblicz sinus kąta ostrego tego rombu i na tej podstawie ustal, czy kąt ostry rombu ma miarę większą od $45°$, czy mniejszą. <u>Zadanie 5.</u> Obwód czworokąta jest równy 54 cm. W czworokąt ten wpisano koło o promieniu 4 cm. Oblicz pole danego czworokąta. <u>Zadanie 6.</u> Czworokąty F_1 i F_2 są podobne. Obwód czworokąta F_1 jest o 15% większy od obwodu czworokąta F_2. O ile procent pole czworokąta F_1 jest większe od pola czworokąta F_2?	<u>Zadanie 4.</u> Na okręgu opisano trapez prostokątny. Odległości środka okręgu od końców dłuższego ramienia są równe 3 cm i 7 cm. Oblicz pole trapezu.	

14. Wielomiany

Tematyka zajęć:

- Wielomian jednej zmiennej rzeczywistej
- Dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów
- Równość wielomianów
- Podzielność wielomianów
- Dzielenie wielomianów. Dzielenie wielomianów z resztą
- Dzielenie wielomianu przez dwumian liniowy za pomocą schematu Hornera
- Pierwiastek wielomianu
- Twierdzenie Bezouta
- Pierwiastek wielokrotny
- Rozkładanie wielomianów na czynniki
- Równania wielomianowe
- Zadania prowadzące do równań wielomianowych
- Równania wielomianowe z parametrem
- Funkcje wielomianowe
- Nierówności wielomianowe

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna pojęcie jednomianu jednej zmiennej; – potrafi wskazać jednomiany podobne; – potrafi rozpoznać wielomian jednej zmiennej rzeczywistej; – potrafi uporządkować wielomian (malejąco lub rosnąco); – potrafi określić stopień wielomianu jednej zmiennej; – potrafi obliczyć wartość wielomianu dla danej	Uczeń: – potrafi sprawnie wykonywać działania na wielomianach; – potrafi udowodnić twierdzenie Bezouta; – zna i potrafi stosować twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych; – potrafi udowodnić twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych; – potrafi sprawnie rozkładać wielomiany na	Uczeń: – potrafi rozwiązywać różne problemy dotyczące wielomianów, które wymagają niestandardowych metod pracy oraz niekonwencjonalnych pomysłów.

wartości zmiennej; – potrafi wykonać dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów; – potrafi podzielić wielomian przez dwumian *ax* + *b*; – potrafi podzielić wielomian przez dowolny wielomian; – potrafi podzielić wielomian przez dwumian liniowy za pomocą schematu Hornera; – potrafi rozpoznać wielomiany równe; – potrafi rozwiązywać proste zadania, w których wykorzystuje się twierdzenie o równości wielomianów; – potrafi sprawdzić, czy podana liczba jest pierwiastkiem wielomianu; – potrafi określić krotność pierwiastka wielomianu; – zna twierdzenie Bezouta i potrafi je stosować w rozwiązywaniu zadań; – zna twierdzenie o reszcie i potrafi je stosować w rozwiązywaniu zadań; – potrafi wyznaczyć wielomian, który jest resztą z dzielenia wielomianu o danych własnościach przez inny wielomian; – potrafi rozłożyć wielomian na czynniki poprzez wyłączanie wspólnego czynnika poza nawias, zastosowanie wzorów skróconego mnożenia, zastosowanie metody grupowania wyrazów, a także wówczas, gdy ma podany jeden z pierwiastków wielomianu i konieczne jest znalezienie pozostałych z wykorzystaniem	czynniki (w tym stosując „metodę prób”); – potrafi rozwiązywać równania i nierówności wielomianowe z wartością bezwzględną; – potrafi rozwiązywać zadania dotyczące własności wielomianów, w których występują parametry; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności wielomianowe z parametrem; – potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności wielomianowych; – potrafi udowodnić wzory Viète’a dla równania trzeciego stopnia.	

twierdzenia Bezouta; – potrafi rozwiązywać równania wielomianowe, które wymagają umiejętności rozkładania wielomianów na czynniki wymienionych w poprzednim punkcie; – potrafi rozwiązywać proste zadania tekstowe prowadzące do równań wielomianowych; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące wielomianów, w których występują parametry; – zna definicję funkcji wielomianowej; – potrafi naszkicować przybliżony wykres funkcji wielomianowej na podstawie informacji o miejscach zerowych tej funkcji oraz znaku współczynnika przy najwyższej potędze zmiennej; – potrafi rozwiązywać nierówności wielomianowe (korzystając z siatki znaków, posługując się przybliżonym wykresem funkcji wielomianowej).		

Przykładowe zadania

Zadanie 1. Oblicz sumę wszystkich współczynników wielomianu $W(x) = (3x^7 - 2x^{16})^{2014}$. Zadanie 2. Wykonaj dzielenie z resztą: $(2x^4 - 3x^3 + 4x - 6) : (x^2 + 2x - 3)$. Zadanie 3.	Zadanie 1. Udowodnij, że jeśli x_1, x_2, x_3 są rozwiązaniami równania $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, to $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -p \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q \\ x_1x_2x_3 = -r \end{cases}$. Zadanie 2.	Zadanie 1. Znajdź wszystkie pary p, q liczb całkowitych takie, że wielomian określony wzorem $W(x) = 1 - 2x - 9x^2 + x^3$ spełnia warunki $W(p) = q$ i $W(q) = p$.

Rozłóż na czynniki możliwie najniższego stopnia wielomiany:

a) $W(x) = 125x^3 - 8$;

b) $W(x) = 9x^3 - 4x^2 - 27x + 12$;

c) $W(x) = 6x^4 - 12x^3 + 6x^2$.

Podaj pierwiastki powyższych wielomianów. Określ krotność pierwiastków.

<u>Zadanie 4..</u>

Dla jakich wartości parametru a reszta z dzielenia wielomianu

$W(x) = 2x^4 - 3x^2 + ax + a^2x + 2$

przez dwumian $(x - 1)$ jest większa od 3?

<u>Zadanie 5.</u>

Rozwiąż równanie i nierówność:

a) $x^3 + 4x^2 - 2x - 8 = 0$;

b) $(x^2 + 1)(x - x^2 - 5)(x^2 + 6x + 9)(x^2 - x - 2) \geq 0$.

<u>Zadanie 6.</u>

Iloczyn kwadratu pewnej liczby i kwadratu liczby o 4 od niej większej jest równy 441. Wyznacz te liczby.

<u>Zadanie 7.</u>

Funkcja wielomianowa $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, gdzie $a \neq 0$, ma dwa różne miejsca zerowe: $x_1 = -2$ oraz $x_2 = 3$. Liczba x_2 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$. Dla argumentu 1 wartość wielomianu wynosi -12.

a) Wyznacz wartości współczynników a, b, c, d.

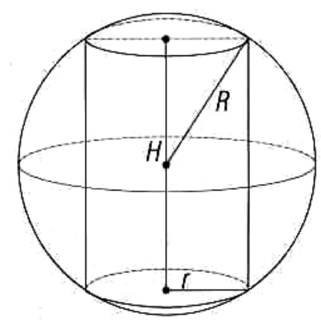
Wyznacz wszystkie wartości parametru p tak, aby równanie $3x^3 + 2(p - 2)x^2 - 2px + 1 = 0$ miało trzy różne rozwiązania.

<u>Zadanie 3.</u>

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których nierówność $x^4 + (m - 2)x^2 + m + 1 > 0$ jest spełniona przez dowolną liczbę rzeczywistą.

<u>Zadanie 4.</u>

W kulę o promieniu 10 cm wpisano walec, którego objętość stanowi 43,2% objętości kuli.



Wyznacz wymiary walca.

<u>Zadanie 5.</u>

Rozwiąż równanie i nierówność:

a) $\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + x - 3\frac{1}{3} = 0$

b) $x^2 \leq |6x - x^3|$.

b) Dla wyznaczonych współczynników rozwiąż nierówność $W(x) \geq 0$.		

15. Ułamki algebraiczne. Równania i nierówności wymierne. Funkcje wymierne

Tematyka zajęć:

- Ułamek algebraiczny. Skracanie i rozszerzanie ułamków algebraicznych
- Dodawanie i odejmowanie ułamków algebraicznych
- Mnożenie i dzielenie ułamków algebraicznych
- Zadania na dowodzenie z zastosowaniem ułamków algebraicznych
- Równania wymierne
- Zadania tekstowe prowadzące do równań wymiernych
- Nierówności wymierne
- Równania i nierówności wymierne z parametrem
- Proporcjonalność odwrotna
- Funkcje wymierne
- Funkcja homograficzna
- Zastosowanie funkcji homograficznej w zadaniach

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna pojecie ułamka algebraicznego jednej zmiennej; – potrafi wyznaczyć dziedzinę ułamka algebraicznego; – potrafi podać przykład ułamka algebraicznego o zadanej dziedzinie; – potrafi wykonywać działania na ułamkach algebraicznych, takie jak: skracanie ułamków, rozszerzanie ułamków, dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie ułamków algebraicznych, określając warunki wykonalności tych działań; – potrafi wykonywać działania łączne na	Uczeń: – potrafi sprawnie wykonywać działania łączne na ułamkach algebraicznych; – potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie z zastosowaniem ułamków algebraicznych (w tym zadania dotyczące związków pomiędzy średnimi: arytmetyczną, geometryczną, średnią kwadratową); – potrafi rozwiązywać równania i nierówności wymierne; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności wymierne z wartością bezwzględną; – potrafi rozwiązywać układy równań i nierówności wymiernych (także z wartością	Uczeń: – potrafi przeprowadzić dyskusję liczby rozwiązań równania wymiernego z parametrem; – potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące funkcji wymiernych wymagające zastosowania niekonwencjonalnych metod.

ułamkach algebraicznych; – potrafi rozwiązywać proste zadania na dowodzenie z zastosowaniem ułamków algebraicznych; – zna definicję równania wymiernego; – potrafi rozwiązywać proste równania wymierne; – potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do prostych równań wymiernych; – zna definicję nierówności wymiernej; – potrafi rozwiązywać proste nierówności wymierne; – wie, jaką zależność między dwiema wielkościami zmiennymi, nazywamy proporcjonalnością odwrotną; potrafi wskazać współczynnik proporcjonalności; – rozwiązuje zadania z zastosowaniem proporcjonalności odwrotnej; – zna definicję funkcji wymiernej; – potrafi określić dziedzinę funkcji wymiernej; – rozwiązuje proste zadania z parametrem dotyczące funkcji wymiernych; – zna definicję funkcji homograficznej $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $c \neq 0$ i $ad - cb \neq 0$; – potrafi przekształcić wzór funkcji $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $c \neq 0$ i $ad - cb \neq 0$, do postaci $y = \frac{k}{x-p} + q$; – potrafi naszkicować wykres funkcji	bezwzględną); – potrafi rozwiązywać równania i nierówności wymierne z parametrem; – potrafi rozwiązywać układy równań i nierówności wymiernych; – potrafi rozwiązywać zadania dotyczące własności funkcji wymiernej (w tym z parametrem); – potrafi dowodzić własności funkcji wymiernej; – potrafi rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące własności funkcji homograficznej; – potrafi napisać wzór funkcji homograficznej na podstawie informacji o jej wykresie; – potrafi naszkicować wykres funkcji homograficznej z wartością bezwzględną i na podstawie wykresu funkcji opisać własności funkcji; – potrafi przeprowadzić dyskusję liczby rozwiązań równania wymiernego z wartością bezwzględną i parametrem, na podstawie wykresu funkcji homograficznej, we wzorze której występuje wartość bezwzględna; – potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności wymiernych.	

homograficznej o równaniu $y = \frac{k}{x-p}+q$; – potrafi na podstawie wzoru funkcji $y = \frac{k}{x-p}+q$ określić jej dziedzinę i zbiór wartości; – potrafi obliczyć miejsce zerowe funkcji homograficznej oraz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji i osi *OY*; – potrafi wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji $y = \frac{k}{x-p}+q$; – potrafi przekształcać wykres funkcji homograficznej w S_{OX}, S_{OY}, $S_{(0,\,0)}$, przesunięciu równoległym o dany wektor; – potrafi rozwiązywać proste zadania z parametrem dotyczące funkcji homograficznej.		

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie: $\frac{x-6}{4x}:\frac{x^2-36}{8}-\frac{x+2}{x+6}$. Podaj konieczne założenia. <u>Zadanie 2.</u> Wykaż, że jeśli $m > 0$ i $0 < b < a$, to $\frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m}$.	<u>Zadanie 1.</u> a) Wykaż, że jeśli liczby *a*, *b*, *c* są dodatnie, to $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. b) Wykaż, że jeśli $a \neq 0$, to $a^4 + \frac{128}{a^2} \geq 48$. <u>Zadanie 2.</u> Rozwiąż równanie i nierówność:	<u>Zadanie 1.</u> Rozwiąż równanie z parametrem *a* ($a \in \boldsymbol{R}$): $\frac{1}{2a+ax}-\frac{1}{2x-x^2}=\frac{2(a+3)}{x^3-4x}$. <u>Zadanie2.</u> Wykaż, że jeśli $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Zadanie 3.

Rozwiąż równanie i nierówność:

a) $\dfrac{x^3-x^2+8}{x^3-8}=\dfrac{1}{x^2+2x+4}+\dfrac{1}{x+2}$

b) $x^2+3x-1<\dfrac{3}{x}$.

Zadanie 4.

Przez jeden z kranów woda wypływa ze zbiornika, a przez drugi do niego wpływa. Po otworzeniu obu kranów zbiornik zostanie napełniony wodą w ciągu 12 godzin. W ciągu ilu godzin pierwszy kran opróżnia pełny zbiornik, a drugi napełnia pusty zbiornik, jeśli wiadomo, że czas napełniania zbiornika jest o godzinę krótszy od czasu jego opróżniania?

Zadanie 5.

Funkcja F określona jest wzorem $F(x)=\dfrac{ax-1}{x+2}$.

Wyznacz wartość parametru a tak, aby do wykresu funkcji F należał punkt $A(3, 1)$.

Dla wyznaczonej wartości parametru:

a) sprowadź wzór tej funkcji F do postaci

$F(x)=\dfrac{k}{x-p}+q$;

b) określ dziedzinę i zbiór wartości funkcji F;

c) podaj przedziały monotoniczności funkcji F;

d) wyznacz zbiór tych argumentów, dla których wartości funkcji F są większe od wartości

a) $x^2+\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2=15$

b) $\dfrac{|x^2-x|+1}{|x+1|-x^2}\geq 1$.

Zadanie 3.

Funkcja $F(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$, gdzie $ac-b\neq 0$ i $x\neq -c$, jest monotoniczna w przedziałach $(-\infty, 3)$, $(3, +\infty)$, zbiorem wartości funkcji jest zbiór $\boldsymbol{R}-\{2\}$, zaś jej miejscem zerowym jest liczba $-2{,}5$. Wyznacz wartości współczynników a, b, c. Następnie:

a) podaj zbiór tych argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości nieujemne;

b) naszkicuj wykres funkcji $G(x)=F(|x|)$ i na jego podstawie zbadaj liczbę rozwiązań równania $G(x)=m$, gdzie $m\in\boldsymbol{R}$.

Zadanie 4.

Dla jakich wartości parametru m ($m\in\boldsymbol{R}$) zbiorem rozwiązań nierówności

$-7<\dfrac{x^2+(m+1)x-5}{x^2-x+1}<3$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych?

Zadanie 5.

Dla jakich wartości parametru m ($m\in\boldsymbol{R}$) równanie $\dfrac{2x^2-(m-4)x+m+2}{x+2}=0$ ma dwa

i $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0$, to $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

funkcji $G(x) = \frac{x+3}{2x-5}$.	różne rozwiązania ujemne?	

16. Ciągi

Tematyka zajęć:

- Określenie ciągu. Sposoby opisywania ciągów
- Monotoniczność ciągów
- Ciąg arytmetyczny
- Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego
- Ciąg geometryczny
- Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego
- Lokaty pieniężne i kredyty bankowe
- Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny – zadania różne
- Granica ciągu liczbowego
- Własności ciągów zbieżnych
- Ciągi rozbieżne do nieskończoności
- Szereg geometryczny

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna definicję ciągu (ciągu liczbowego); – potrafi wyznaczyć dowolny wyraz ciągu liczbowego określonego wzorem ogólnym; – potrafi narysować wykres ciągu liczbowego określonego wzorem ogólnym; – potrafi zbadać na podstawie definicji monotoniczność ciągu liczbowego określonego wzorem ogólnym; – potrafi podać przykłady ciągów liczbowych monotonicznych; – potrafi sprawdzić, które wyrazy ciągu należą do danego przedziału; – potrafi wyznaczyć wyrazy ciągu o podanej	Uczeń: – potrafi określić ciąg wzorem rekurencyjnym; – potrafi wyznaczyć wyrazy ciągu określonego wzorem rekurencyjnym; – wie, jaki ciąg liczbowy nazywamy ciągiem Fibonacciego; zna definicję rekurencyjną tego ciągu i wzór na wyraz ogólny; – potrafi wyprowadzić wzór na sumę *n* kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; – potrafi wyprowadzić wzór na sumę *n* kolejnych początkowych wyrazów ciągu geometrycznego; – potrafi udowodnić nierówność Bernoulliego; – zna definicję i rozumie pojęcie granicy ciągu liczbowego zbieżnego;	Uczeń: – zna, rozumie i potrafi zastosować twierdzenie o trzech ciągach do obliczenia granicy danego ciągu; – wie, co to jest liczba e oraz potrafi obliczać granice ciągów z liczbą e. – potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie, w których jest mowa o ciągach.

wartości; – zna definicję ciągu arytmetycznego; – potrafi zbadać na podstawie definicji, czy dany ciąg określony wzorem ogólnym jest arytmetyczny; – potrafi podać przykłady ciągów arytmetycznych; – zna i potrafi stosować w rozwiązywaniu zadań wzór na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego; – zna i potrafi stosować w rozwiązywaniu zadań wzór na sumę *n* kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; – potrafi wykorzystać średnią arytmetyczną do obliczenia wyrazu środkowego ciągu arytmetycznego; – zna definicję ciągu geometrycznego; – potrafi zbadać na podstawie definicji, czy dany ciąg określony wzorem ogólnym jest geometryczny; – zna i potrafi stosować w rozwiązywaniu zadań wzór na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego; – zna i potrafi stosować wzór na sumę *n* kolejnych początkowych wyrazów ciągu geometrycznego; – potrafi wykorzystać średnią geometryczną do obliczenia wyrazu środkowego ciągu geometrycznego; – potrafi wyznaczyć ciąg arytmetyczny (geometryczny) na podstawie wskazanych danych; – potrafi stosować procent prosty i składany	– potrafi wykazać na podstawie definicji, że dana liczba jest granicą ciągu; – zna i potrafi stosować twierdzenia dotyczące własności ciągów zbieżnych; – potrafi obliczać granice różnych ciągów zbieżnych; – potrafi obliczać granice niewłaściwe różnych ciągów rozbieżnych do nieskończoności; – potrafi rozwiązywać różne zadania z zastosowaniem wiadomości o szeregu geometrycznym zbieżnym.	

w zadaniach dotyczących oprocentowania lokat i kredytów; – potrafi rozwiązywać zadania „mieszane” dotyczące ciągów arytmetycznych i geometrycznych; – rozumie intuicyjnie pojęcie granicy ciągu liczbowego zbieżnego; – zna i potrafi stosować twierdzenie o działaniach arytmetycznych na granicach ciągów zbieżnych; – potrafi obliczyć granicę ciągu liczbowego (proste przykłady); – potrafi odróżnić ciąg geometryczny od szeregu geometrycznego; – zna warunek na zbieżność szeregu geometrycznego i wzór na sumę szeregu; – potrafi zbadać warunek na istnienie sumy szeregu geometrycznego (proste przykłady); – potrafi obliczać sumę szeregu geometrycznego (zamiana ułamka okresowego na ułamek zwykły, proste równania i nierówności wymierne, proste zadania geometryczne); – potrafi obliczać granice niewłaściwe ciągów rozbieżnych do nieskończoności (proste przykłady).		

Przykładowe zadania

Zadanie 1. Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem ogólnym $a_n = \frac{3n+4}{n+1}$.	Zadanie 1. Wyznacz wyraz ogólny ciągu geometrycznego określonego wzorem rekurencyjnym:	Zadanie 1. Udowodnij, że jeśli a, b, c i d tworzą ciąg geometryczny, to $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) =$

a) Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n).
b) Oblicz granicę ciągu (a_n).
c) Wyznacz te wyrazy ciągu (a_n), które należą do przedziału $(3\frac{1}{8}, 3\frac{3}{4})$.

Zadanie 2.
Suma czwartego i siódmego wyrazu ciągu arytmetycznego wynosi 86, a suma drugiego i trzynastego wyrazu tego ciągu jest równa 22. Znajdź pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu. Oblicz, ile wyrazów tego ciągu daje w sumie liczbę –73450.

Zadanie 3.
Firma zdeponowała w banku pewną sumę pieniędzy na trzy lata. Po tym okresie na koncie tej firmy było 283 031,15 zł. Wiedząc, że roczna stopa procentowa wynosiła 20%, a odsetki kapitalizowane były co pół roku, oblicz jaką kwotę zdeponowała firma.

Zadanie 4.
Ciąg (a, b, 4) jest ciągiem arytmetycznym, a ciąg (4, a, b) jest ciągiem geometrycznym.
Wyznacz a, b.

Zadanie 5.
Zapisz liczbę 0,93303303303... w postaci ilorazu dwóch liczb całkowitych.

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = (-4) \cdot a_{n-1} \end{cases}$$

Zadanie 2.
Ciąg arytmetyczny ma pięć wyrazów. Środkowy wyraz tego ciągu ma wartość 5. Pierwszy, drugi i piąty wyraz tego ciągu (w podanej kolejności) tworzą ciąg geometryczny. Wyznacz wyrazy ciągu geometrycznego.

Zadanie 3.
Wykaż, na podstawie definicji, że liczba $\frac{2}{3}$ jest granicą ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{2n+1}{3n-2}$.

Zadanie 4.
Oblicz granice ciągów:

$$a_n = \sqrt{n^2 - 2n} - n;$$

$$b_n = \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots.. + \frac{1}{3^{n-1}}}{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots.. + \frac{1}{4^{n-1}}}.$$

Zadanie 5.
Wykaż, że w nieskończonym ciągu geometrycznym zbieżnym, w którym $a_1 q \neq 0$, stosunek dowolnego wyrazu tego ciągu do sumy wszystkich występujących po nim wyrazów, jest stały.
Jaki powinien być iloraz tego ciągu, aby dowolny

$= (ab + bc + cd)^2$.

Zadanie 2.
Oblicz granice ciągów:

a) $a_n = \frac{2n^2 \cdot \cos(4n)}{n^3 + 3n + 5}$;

b) $b_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{2n^2}$.

<u>Zadanie 6.</u> Rozwiąż równanie $2x + 4 + \frac{8}{x} = -\frac{16}{3}$.	wyraz tego ciągu równał się pięciokrotnej sumie wszystkich wyrazów po nim występujących?	

17. Trygonometria

Tematyka zajęć:

- Miara łukowa kąta
- Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej
- Wykresy funkcji $y = \sin x$ oraz $y = \cos x$
- Wykresy funkcji $y = \operatorname{tg} x$ oraz $y = \operatorname{ctg} x$
- Przekształcenia wykresów funkcji trygonometrycznych
- Proste równania trygonometryczne
- Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy
- Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych
- Równania trygonometryczne
- Nierówności trygonometryczne

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – wie, co to jest miara łukowa kąta; – potrafi stosować miarę łukową i stopniową kąta (zamieniać stopnie na radiany i radiany na stopnie); – zna definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta i potrafi się nimi posługiwać w rozwiązywaniu zadań; – zna związki pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta; – potrafi wyznaczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta, gdy dana jest jedna z nich; – zna i potrafi stosować wzory redukcyjne dla kątów o miarach wyrażonych w stopniach oraz radianach; – potrafi naszkicować wykres funkcji $y = \sin x$ i omówić jej własności;	Uczeń: – potrafi zbadać, czy funkcja trygonometryczna jest parzysta (nieparzysta); – potrafi określić zbiór wartości funkcji trygonometrycznej; – potrafi wyznaczyć okres podstawowy funkcji trygonometrycznej; – potrafi przekształcać wykresy funkcji trygonometrycznych, stosując takie przekształcenia, jak: $y = \lvert f(x) \rvert$, $y = f(\lvert x \rvert)$, $y = s \cdot f(x)$ oraz $y = f(s \cdot x)$, gdzie $s \neq 0$; – potrafi stosować wzory na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów, wzory na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych, wzory na funkcje	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności lub wymagające niekonwencjonalnych pomysłów i metod rozwiązywania.

– potrafi naszkicować wykres funkcji $y = \cos x$ i omówić jej własności; – potrafi naszkicować wykres funkcji $y = \operatorname{tg} x$ i omówić jej własności; – potrafi naszkicować wykres funkcji $y = \operatorname{ctg} x$ i omówić jej własności; – potrafi przekształcać wykresy funkcji trygonometrycznych, stosując takie przekształcenia, jak: symetria osiowa względem osi *OX*, symetria osiowa względem osi *OY*, symetria środkowa, względem punktu (0, 0), przesunięcie równoległe o dany wektor) – potrafi wyznaczyć zbiór wartości funkcji trygonometrycznej (w prostych przypadkach); – wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych; – potrafi rozwiązywać proste równania i nierówności trygonometryczne, korzystając z wykresów odpowiednich funkcji trygonometrycznych; – zna wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów i potrafi je stosować do rozwiązywania prostych zadań; – zna wzory na sumę i różnicę sinusów i cosinusów i potrafi je stosować do rozwiązywania prostych zadań; – zna wzory na sinus i cosinus kąta podwojonego kąta i potrafi je stosować do rozwiązywania prostych zadań; – potrafi rozwiązywać proste równania i nierówności trygonometryczne z zastosowaniem poznanych wzorów.	trygonometryczne wielokrotności kąta do przekształcania wyrażeń trygonometrycznych; – potrafi stosować wzory na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów, wzory na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych, wzory na funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta do dowodzenia tożsamości trygonometrycznych; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności trygonometryczne z zastosowaniem wzorów na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów, wzorów na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych, wzorów na funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności trygonometryczne z wartością bezwzględną z zastosowaniem poznanych wzorów; – potrafi rozwiązywać równania trygonometryczne z parametrem; – potrafi rozwiązywać różne zadania z innych działów matematyki, w których wykorzystuje się wiadomości i umiejętności z trygonometrii.	

Przykładowe zadania

Zadanie 1. a) Zamień 240° na radiany. b) Zamień $\frac{2}{5}\pi$ radianów na stopnie. Zadanie 2. Wyznacz zbiór wartości funkcji określonej wzorem $f(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{2}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$. Zadanie 3. Oblicz wartość wyrażenia $\cos\alpha - \cos\beta$, jeśli $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\sin\beta = \frac{\sqrt{7}}{5}$ i $\alpha, \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Zadanie 4. Sprawdź, czy prawdziwa jest równość $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \text{tg}\,\alpha$. Podaj konieczne założenia. Zadanie 5. a) Rozwiąż równanie $2\sin(3x - \frac{\pi}{4}) = 1$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$; b) Rozwiąż nierówność $2\cos^2 x + 5\cos x - 3 \geq 0$, gdzie $x \in (-\pi, 2\pi)$.	Zadanie 1. Wyznacz zbiór wartości funkcji określonej wzorem $f(x) = \cos x + \cos\frac{x}{2}$. Zadanie 2. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = 0{,}5 \cdot \sin(2x - \frac{\pi}{3})$. Zadanie 3. Wykaż, że $2(1 + \cos\alpha) - \sin^2\alpha = 4\cos^4\frac{\alpha}{2}$. Zadanie 4. Dla jakich wartości parametru m ($m \in \boldsymbol{R}$) równanie $\sin^4 x + \cos^4 x = m$ ma rozwiązanie. Zadanie 5. Rozwiąż równanie $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$ w przedziale $(-\pi, \pi)$. Zadanie 6. Rozwiąż nierówność $\sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \sin^8 x + \ldots \geq 1$.	Zadanie 1. Wykaż, że $\text{tg}^2\frac{2\pi}{5} = 5\,\text{ctg}^2\frac{\pi}{5}$.

18. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

Tematyka zajęć:

- Potęga o wykładniku rzeczywistym – powtórzenie
- Funkcja wykładnicza i jej własności
- Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej. Rozwiązywanie zadań z zastosowaniem wykresów funkcji wykładniczych
- Równania wykładnicze
- Nierówności wykładnicze
- Zastosowanie równań i nierówności wykładniczych w rozwiązywaniu zadań
- Logarytm – powtórzenie wiadomości
- Funkcja logarytmiczna i jej własności
- Przekształcenia wykresu funkcji logarytmicznej
- Rozwiązywanie równań, nierówności oraz układów równań z zastosowaniem wykresu funkcji logarytmicznej
- Równania logarytmiczne
- Nierówności logarytmiczne
- Równania i nierówności logarytmiczno-wykładniczo-potęgowe
- Zastosowanie równań i nierówności logarytmicznych w rozwiązywaniu zadań
- Zastosowanie funkcji wykładniczej i funkcji logarytmicznej do rozwiązywania zadań umieszczonych w kontekście praktycznym

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi sprawnie wykonywać działania na potęgach o wykładniku rzeczywistym; – stosuje własności działań na potęgach w rozwiązywaniu zadań; – zna definicję funkcji wykładniczej; – potrafi odróżnić funkcję wykładniczą od innych – funkcji;	Uczeń: – potrafi szkicować wykresy funkcji wykładniczych z wartością bezwzględną; – potrafi szkicować wykresy funkcji logarytmicznych z wartością bezwzględną; – potrafi interpretować graficznie równania wykładnicze z parametrem; – potrafi interpretować graficznie równania	Uczeń: – potrafi rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze z parametrem; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności logarytmiczne z parametrem; – potrafi rozwiązywać zadania na

– potrafi szkicować wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw; – potrafi opisać własności funkcji wykładniczej na podstawie jej wykresu; – potrafi przekształcać wykresy funkcji wykładniczych (S_{OX}, $S_{OY,}$ $S_{(0,0)}$, przesunięcie równoległe o dany wektor); – potrafi rozwiązywać graficznie równania, nierówności oraz układy równań z zastosowaniem wykresów funkcji wykładniczych; – zna pojęcie równania wykładniczego oraz nierówności wykładniczej; – potrafi rozwiązywać algebraicznie i graficznie proste równania oraz nierówności wykładnicze; – potrafi obliczyć logarytm liczby dodatniej; – zna i potrafi stosować własności logarytmów do obliczania wartości wyrażeń; – zna definicję funkcji logarytmicznej; – potrafi odróżnić funkcję logarytmiczną od innej funkcji; – potrafi określić dziedzinę funkcji logarytmicznej; – potrafi szkicować wykresy funkcji logarytmicznych dla różnych podstaw; – potrafi opisać własności funkcji logarytmicznej na podstawie jej wykresu; – potrafi przekształcać wykresy funkcji logarytmicznych (S_{OX}, $S_{OY,}$ $S_{(0,0)}$, przesunięcie równoległe o dany wektor); – potrafi graficznie rozwiązywać równania, nierówności oraz układy równań	logarytmiczne z parametrem; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze i logarytmiczne; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze oraz logarytmiczne z wartością bezwzględną; – potrafi rozwiązywać układy równań i nierówności wykładniczych oraz logarytmicznych; – potrafi rozwiązywać równania wykładniczo-potęgowo-logarytmiczne; – potrafi dowodzić własności logarytmów; – potrafi naszkicować zbiór punktów płaszczyzny spełniających dane równanie lub nierówność z dwiema niewiadomymi, w których występują logarytmy; – potrafi badać, na podstawie definicji, własności funkcji wykładniczych i logarytmicznych (np. parzystość, nieparzystość, monotoniczność); – potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie (o średnim stopniu trudności), w których wykorzystuje wiadomości dotyczące funkcji wykładniczej i logarytmicznej; – potrafi stosować wiadomości o funkcji wykładniczej i logarytmicznej w różnych zadaniach (np. dotyczących ciągów, szeregów, trygonometrii, itp.).	dowodzenie (o podwyższonym stopniu trudności), w których wykorzystuje własności funkcji wykładniczych i logarytmicznych.

z zastosowaniem wykresów funkcji logarytmicznych; – potrafi algebraicznie rozwiązywać proste równania oraz nierówności logarytmiczne; – rozwiązuje zadania tekstowe osadzone w kontekście praktycznym, w których wykorzystuje umiejętność rozwiązywania prostych równań i nierówności wykładniczych oraz logarytmicznych (lokaty bankowe, rozpad substancji promieniotwórczych itp.) – posługuje się funkcjami wykładniczymi oraz funkcjami logarytmicznymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych itp.		

Przykładowe zadania

Zadanie 1. Wykaż, że jeśli $a = \log_{45}3$ to $\log_3 5 = \frac{1-2a}{a}$. Zadanie 2. a) Rozwiąż graficznie równanie $3^x - 1 = -2x^2 + 4x$. b) Rozwiąż nierówność $\log_{\frac{1}{4}} \frac{3}{x-1} > \log_{\frac{1}{4}} \frac{2}{x+1}$. c) Rozwiąż równanie $\log(x+3) - \log 0{,}4 = 2\log(x-2)$. Zadanie 3. Określ dziedzinę funkcji	Zadanie 1. a) Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \left\|\log_2 \frac{x-2}{x^2-4}\right\|$. b) Naszkicuj wykres funkcji f. c) Wyznacz zbiór wszystkich wartości parametru m, dla których równanie $\left\|\log_2 \frac{x-2}{x^2-4}\right\| = m^2 - 2$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Zadanie 2. Rozwiąż równanie i nierówność: a) $\frac{1}{4}\sqrt{12-3^{x+1}} = 3^x - 3^{x-1} - 3^{x-2} - 3^{x-3} + \ldots$	Zadanie 1. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla których równanie $\log[(m+4)x] = \log(x^2 + 2x)$ ma tylko jedno rozwiązanie, które jest liczbą ujemną. Zadanie 2. Wykaż, że $\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 \geq 4{,}4$.

$f(x) = \log_{x^2-1}(x^2-2x-3)$. Zadanie 4. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = 1 - \log_2(x+3)$ i na jego podstawie omów własności funkcji f. Zadanie 5. Pan Kowalski złożył w banku pewną kwotę K_0 [zł] na procent składany w wysokości 4% rocznie przy kapitalizacji kwartalnej. Oblicz, po ilu latach kwota ta podwoi się. Uwzględnij 18% podatek od odsetek.	b) $\log_{\frac{x}{2}} 8 + \log_{\frac{x}{4}} 8 < \frac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}$. Zadanie 3. W prostokątnym układzie współrzędnych zaznacz zbiór tych punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają warunek: $\log_{x+1}(y-4) < 1$. Zadanie 4. Zbadaj parzystość (nieparzystość) funkcji $f(x) = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$. Zadanie 5. Rozwiąż nierówność: $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{\sqrt{3}}(ctgx-1)} > 1$ w zbiorze $(0, 2\pi)$.	

19. Elementy analizy matematycznej

Tematyka zajęć:

- Powtórzenie i uzupełnienie wiadomości o granicach ciągów
- Granica funkcji w punkcie
- Obliczanie granic funkcji w punkcie
- Granice jednostronne funkcji w punkcie
- Granice funkcji w nieskończoności
- Granica niewłaściwa funkcji
- Ciągłość funkcji w punkcie
- Ciągłość funkcji w zbiorze
- Asymptoty wykresu funkcji
- Pochodna funkcji w punkcie
- Funkcja pochodna
- Styczna do wykresu funkcji
- Pochodna funkcji a monotoniczność funkcji
- Ekstrema lokalne funkcji
- Największa i najmniejsza wartość funkcji w przedziale
- Badanie przebiegu zmienności funkcji
- Zadania optymalizacyjne

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi obliczać granice ciągów liczbowych; – zna i rozumie pojęcie granicy funkcji w punkcie (definicja Heinego); – potrafi, posługując się definicją Heinego granicy funkcji w punkcie, wykazać, że granicą	Uczeń: – zna i potrafi stosować twierdzenie o trzech funkcjach; – potrafi rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące badania ciągłości funkcji w punkcie i w zbiorze;	Uczeń: – rozwiązuje zadania o podwyższonym stopni trudności; – potrafi wyprowadzić wzory na pochodne funkcji.

danej funkcji w danym punkcie jest pewna liczba lub wykazać, że granica funkcji w danym punkcie nie istnieje; – zna twierdzenia dotyczące obliczania granic w punkcie; – potrafi obliczyć granicę właściwą i niewłaściwą funkcji w punkcie, korzystając z poznanych twierdzeń; – potrafi obliczyć granice jednostronne funkcji w punkcie; –potrafi obliczyć granice funkcji w nieskończoności; – zna i rozumie pojęcie funkcji ciągłej w punkcie; – potrafi zbadać ciągłość danej funkcji w danym punkcie; – zna definicję funkcji ciągłej w zbiorze; – potrafi zbadać ciągłość danej funkcji w danym zbiorze; – potrafi wyznaczyć równania asymptot pionowych, poziomych oraz ukośnych wykresu funkcji wymiernej (o ile wykres ma takie asymptoty); – zna pojęcie ilorazu różnicowego funkcji; – zna i rozumie pojęcie pochodnej funkcji w punkcie; – potrafi obliczyć pochodną funkcji w punkcie na podstawie definicji; – zna i rozumie pojęcie funkcji pochodnej; – potrafi sprawnie wyznaczać pochodne funkcji wymiernych na podstawie poznanych wzorów; – potrafi zbadać, czy dana funkcja jest różniczkowalna w danym punkcie (zbiorze);	– zna własności funkcji ciągłych i potrafi je stosować w rozwiązywaniu zadań (twierdzenie Darboux oraz twierdzenie Weierstrassa); – potrafi wyznaczyć równania asymptot wykresu funkcji, we wzorze której występuje wartość bezwzględna (o ile asymptoty istnieją); – potrafi rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące różniczkowalności funkcji; – zna związek pomiędzy ciągłością i różniczkowalnością funkcji; – potrafi zastosować wiadomości o stycznej do wykresu funkcji w rozwiązywaniu różnych zadań; – potrafi wyznaczyć przedziały monotoniczności oraz ekstrema funkcji, w której wzorze występuje wartość bezwzględna; – potrafi stosować rachunek pochodnych do analizy zjawisk opisanych wzorami funkcji wymiernych; – potrafi stosować rachunek pochodnych w rozwiązywaniu zadań optymalizacyjnych.	

– potrafi wyznaczyć równanie stycznej do wykresu danej funkcji; – potrafi zbadać monotoniczność funkcji za pomocą pochodnej; – zna i rozumie warunek konieczny i wystarczający istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej; – potrafi wyznaczyć ekstrema funkcji wymiernej; – potrafi wyznaczyć najmniejszą oraz największą wartość danej funkcji wymiernej w przedziale domkniętym; – potrafi zbadać przebieg zmienności danej funkcji wymiernej i naszkicować jej wykres; – potrafi stosować rachunek pochodnych do rozwiązywania prostych zadań optymalizacyjnych.		

Przykładowe zadania

Zadanie 1. Oblicz granice funkcji: a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x^2-6}{x^2-4}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x^2+4}{5x^3-8x+1}$ Zadanie 2. Wykaż, że nie istnieje granica funkcji $f(x) = \frac{\lvert 2x\rvert}{3x}$, w punkcie $x_0 = 0$.	Zadanie 1. Oblicz granicę: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{5}\cdot\sin 9x$. Zadanie 2. Wykaż, że równanie $\cos x - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}x = 0$ ma rozwiązanie w przedziale $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Zadanie 3.	Zadanie 1. Wykaż, że jeśli $x \in (0, +\infty)$, to $x^4 - x^2 + 1 > \frac{1}{x^2+1}$. Zadanie 2. Wykaż, że jeśli $0 < a < b$, to $\left(1-\frac{a}{b}\right) < \ln b - \ln a < \left(\frac{b}{a}-1\right)$.

Zadanie 3. Zbadaj ciągłość funkcji $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{dla } x \le 0 \\ 1-x & \text{dla } 0 < x \le 1 \\ \sqrt{x+2} & \text{dla } x > 1 \end{cases}$. **Zadanie 3.** Zbadaj, czy wykres funkcji $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$ ma asymptoty. Jeśli tak, to wyznacz ich równania. **Zadanie 4.** Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ w punkcie $A(x_0, -9)$. **Zadanie 5.** Wyznacz ekstrema lokalne funkcji $g(x) = \frac{x^2-3x+4}{x-3}$.	Wyznacz równania wszystkich asymptot wykresu funkcji $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\lvert x\rvert+4} & \text{dla } \lvert x\rvert \ge 2 \\ \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} & \text{dla } \lvert x\rvert < 2 \end{cases}$. **Zadanie 4.** Zbadaj , czy istnieją takie wartości parametrów a i b, dla których funkcja określona wzorem $f(x) = \begin{cases} -x^2+2bx & \text{dla } x \in (-\infty,1) \\ 2x^2+ax & \text{dla } x \in \langle 1,+\infty) \end{cases}$ jest ciągła i różniczkowalna. **Zadanie 5.** Wyznacz przedziały monotoniczności oraz ekstrema funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x+\lvert 7-2x\rvert}$. **Zadanie 6.** W pewnym zakładzie produkcyjnym zależność między kosztem całkowitym produkcji K a jej wielkością x wyraża się wzorem $K(x) = x^3 + 500x + 16\,000$. Przy jakiej wielkości produkcji koszt przypadający na jednostkę wytworzonego produktu jest najmniejszy?	

20. Geometria analityczna

Tematyka zajęć:

- Wektor w układzie współrzędnych. Współrzędne środka odcinka
- Kąt między niezerowymi wektorami
- Równanie kierunkowe prostej
- Równanie ogólne prostej
- Kąt między prostymi
- Odległość punktu od prostej. Odległość między dwiema prostymi równoległymi
- Pole trójkąta. Pole wielokąta
- Równanie okręgu. Nierówność opisująca koło
- Wzajemne położenie prostej i okręgu. Styczna do okręgu
- Wzajemne położenie dwóch okręgów
- Jednokładność. Jednokładność w układzie współrzędnych
- Zastosowanie analizy matematycznej w rozwiązaniach zadań z geometrii analitycznej

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – stosuje informacje zdobyte w klasie pierwszej, dotyczące wektora w układzie współrzędnych, w rozwiązywaniu zadań; – potrafi wyznaczyć współrzędne środka odcinka; – potrafi obliczyć długość odcinka, znając współrzędne jego końców; – zna definicję kąta utworzonego przez dwa niezerowe wektory; – zna i potrafi stosować w zadaniach wzory na cosinus i sinus kąta utworzonego przez dwa	Uczeń: – rozwiązuje zadania, dotyczące wektorów, w których występują parametry; – rozwiązuje zadania z geometrii analitycznej (o średnim stopniu trudności), w rozwiązaniach których sprawnie korzysta z poznanych wzorów; – potrafi rozwiązywać różne zadania dotyczące okręgów i kół w układzie współrzędnych, w których konieczne jest zastosowanie wiadomości z różnych działów matematyki;	Uczeń: – potrafi wyprowadzić wzory na sinus i cosinus kąta utworzonego przez dwa niezerowe wektory; – potrafi wyprowadzić wzory na tangens kąta utworzonego przez dwie proste dane równaniami kierunkowym (ogólnymi); – potrafi wyprowadzić wzór na odległość punktu od prostej; – potrafi rozwiązywać zadania

niezerowe wektory; – zna warunki na prostopadłość i równoległość wektorów i potrafi je zastosować w zadaniach; – zna definicję równania kierunkowego prostej oraz znaczenie współczynników występujących w tym równaniu; – potrafi napisać równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez dwa dane punkty oraz równanie kierunkowe prostej, znając jej kąt nachylenia do osi *OX* i współrzędne punktu, który do należy tej prostej; – zna definicję równania ogólnego prostej; – potrafi napisać równanie ogólne prostej przechodzącej przez dwa punkty; – zna i potrafi stosować w zadaniach warunek na równoległość oraz prostopadłość prostych danych równaniami kierunkowymi (ogólnymi); – potrafi obliczyć (korzystając z poznanych wzorów) miarę kąta, jaki tworzą dwie proste przecinające się; – zna i potrafi stosować w zadaniach, wzór na odległość punktu od prostej; – potrafi obliczyć odległość między dwiema prostymi równoległymi: – potrafi obliczyć pole trójkąta oraz dowolnego wielokąta, gdy dane są współrzędne jego wierzchołków; – rozpoznaje równanie okręgu w postaci zredukowanej oraz w postaci kanonicznej; – potrafi sprowadzić równanie okręgu z postaci zredukowanej do postaci kanonicznej	– potrafi rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące okręgów i kół w układzie współrzędnych.; – stosuje rachunek pochodnych w rozwiązaniach zadań z geometrii analitycznej.	z geometrii analitycznej o podwyższonym stopniu trudności .

(i odwrotnie); – potrafi odczytać z równania okręgu współrzędne środka i promień okręgu; – potrafi napisać równanie okręgu, gdy zna współrzędne środka i promień tego okręgu; – rozpoznaje nierówność opisującą koło; – potrafi odczytać z nierówności opisującej koło współrzędne środka i promień tego koła; – potrafi napisać nierówność opisującą koło w sytuacji, gdy zna współrzędne środka i promień koła; – potrafi narysować w układzie współrzędnych okrąg na podstawie danego równania opisującego okrąg; – potrafi narysować w układzie współrzędnych koło na podstawie danej nierówności opisującej koło; – potrafi określić wzajemne położenie prostej o danym równaniu względem okręgu o danym równaniu (po wykonaniu stosownych obliczeń); – potrafi określić wzajemne położenie dwóch okręgów danych równaniami (na podstawie stosownych obliczeń); – potrafi obliczyć współrzędne punktów wspólnych prostej i okręgu lub stwierdzić, że prosta i okrąg nie mają punktów wspólnych; – potrafi obliczyć współrzędne punktów wspólnych dwóch okręgów (lub stwierdzić, że okręgi nie przecinają się), gdy znane są równania tych okręgów; – potrafi wyznaczyć równanie stycznej do okręgu;		

– potrafi napisać równanie okręgu opisanego na trójkącie, gdy dane ma współrzędne wierzchołków trójkąta; – potrafi rozwiązywać proste zadania z wykorzystaniem wiadomości o prostych, trójkątach, parabolach i okręgach; – zna pojęcie jednokładności o środku S i skali $k \neq 0$ (także w ujęciu analitycznym); – zna własności figur jednokładnych; – potrafi rozwiązywać proste zadania z zastosowaniem jednokładności.		

Przykładowe zadania

Zadanie 1. Oblicz sumę sinusów kątów wewnętrznych trójkąta o wierzchołkach $A(1, -4)$, $B(6, 3)$, $C(2, 5)$. Zadanie 2. Prosta k jest nachylona do osi OX pod kątem $\alpha = 60°$ i przechodzi przez punkt $A(5, 3)$. Napisz równanie ogólne i kierunkowe tej prostej. Zadanie 3. Dany jest czworokąt $ABCD$, gdzie $A(2, 1)$, $B(6,-2)$, $C(4, 3)$, $D(0, 8)$. a) Oblicz pole tego czworokąta. b) Oblicz odległość wierzchołka B od boku AD. c) Oblicz miarę kąta ostrego, jaki tworzą przekątne tego czworokąta (wynik podaj z dokładnością do 1°).	Zadanie 1. Dane są wektory $\vec{u} = [-5, 3]$, $\vec{v} = [2, -1]$, $\vec{p} = [1, 4]$. Wykaż, że jeśli wektory $\vec{u} + a \cdot \vec{v}$ *oraz* $\vec{p}$ są prostopadłe, to $a = 3{,}5$. Zadanie 2. Wyznacz równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P(-5, 16)$, która tworzy z osią odciętych kąt o mierze dwa razy większej od kąta, jaki tworzy z tą osią prosta k o równaniu $y = \frac{2}{3}x - 1$. Zadanie 3. Wyznacz równanie zbioru środków wszystkich okręgów stycznych do prostej k: $y = 0$ i jednocześnie stycznych zewnętrznie do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 4x$.	Zadanie 1. Przez punkt $A = (0, 1)$ poprowadzono styczne do okręgu $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$. Znajdź równanie krzywej, którą tworzą środki wszystkich cięciw danego okręgu wyznaczonych przez proste przechodzące przez punkt A.

<u>Zadanie 4.</u> Dany jest trójkąt *ABC*, gdzie $A(1, 5)$, $B(8, -2)$, $C(9, 1)$. a) Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta $A'B'C'$, który jest obrazem trójkąta *ABC* w jednokładności o środku $S(1, 3)$ i skali $k = -2$. b) Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie $A'B'C'$. <u>Zadanie 5.</u> Określ wzajemne położenie prostej k: $y = \frac{1}{2}x$ względem okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 6x = 0$. <u>Zadanie 6.</u> Napisz równania stycznych do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$ przechodzących przez punkt $A(-4, 3)$.	<u>Zadanie 4.</u> Dla jakich wartości parametru m ($m \in \mathbf{R}$) okręgi opisane równaniami o_1: $(x - m)^2 + (y + 2)^2 = 20$ oraz o_2: $(x + 1)^2 + (y - 2m)^2 = 5$ są wewnętrznie styczne? Dla znalezionych wartości parametrów wykonaj rysunek. Oblicz współrzędne punktu styczności. <u>Zadanie 5.</u> Wykres funkcji $y = \|x - 2\|$ przecina okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0$ w punktach *A* i *B*. a) Oblicz współrzędne punktów *A* i *B*. b) Wykaż, że trójkąt *ABC*, gdzie *S* jest środkiem okręgu, jest prostokątny. c) Oblicz pole figury $F = F_1 \cap F_2$, gdzie $F_1 = \{(x, y): x \in \mathbf{R} \wedge y \in \mathbf{R} \wedge x^2 + y^2 - 4x - 4 \leq 0\}$, a $F_2 = \{(x, y): x \in \mathbf{R} \wedge y \in \mathbf{R} \wedge y \leq \|x - 2\|\}$. <u>Zadanie 6.</u> Na gałęzi hiperboli o równaniu $f(x) = \frac{4}{x}$, gdzie $x \in (0, +\infty)$, wyznacz współrzędne takiego punktu *P*, którego odległość od punktu $A(-3, 3)$ jest najmniejsza.	

21. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

Tematyka zajęć:

- Reguła mnożenia i reguła dodawania
- Wariacje
- Permutacje
- Kombinacje
- Kombinatoryka – zadania różne
- Doświadczenie losowe
- Zdarzenia. Działania na zdarzeniach
- Określenie prawdopodobieństwa
- Prawdopodobieństwo klasyczne
- Doświadczenia losowe wieloetapowe
- Prawdopodobieństwo warunkowe
- Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym
- Niezależność zdarzeń

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna regułę dodawania oraz regułę mnożenia; – zna pojęcie permutacji zbioru i umie stosować wzór na liczbę permutacji; – zna pojęcie wariacji z powtórzeniami i bez powtórzeń i umie stosować wzory na liczbę takich wariacji; – zna pojęcie kombinacji i umie stosować wzór na liczbę kombinacji; – umie rozwiązywać proste zadania kombinatoryczne z zastosowaniem poznanych	Uczeń: – umie rozwiązywać zadania kombinatoryczne o średnim stopniu trudności; – umie udowodnić własności prawdopodobieństwa; – umie stosować własności prawdopodobieństwa do rozwiązywania zadań „teoretycznych”; – zna i potrafi stosować wzór Bayesa; – wie i rozumie na czym polega niezależność n zdarzeń ($n \geq 2$).	Uczeń: – potrafi udowodnić, że prawdopodobieństwo warunkowe spełnia warunki aksjomatycznej definicji prawdopodobieństwa; – potrafi udowodnić wzór na prawdopodobieństwo całkowite; – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania dotyczące kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa.

wzorów; – zna terminy: doświadczenie losowe, zdarzenie elementarne, przestrzeń zdarzeń elementarnych, zdarzenie, zdarzenie pewne zdarzenie niemożliwe, zdarzenia wykluczające się; – potrafi określić zbiór wszystkich zdarzeń danego doświadczenia losowego, obliczyć jego moc oraz obliczyć liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających danemu zdarzeniu; – potrafi stosować klasyczną definicję prawdopodobieństwa w rozwiązaniach zadań; – zna i rozumie aksjomatyczną definicję prawdopodobieństwa; – zna własności prawdopodobieństwa i umie je stosować w rozwiązaniach prostych zadań; – rozwiązuje zadania za pomocą drzewa stochastycznego; – zna określenie prawdopodobieństwa warunkowego i umie rozwiązywać proste zadania dotyczące takiego prawdopodobieństwa; – zna wzór na prawdopodobieństwo całkowite i potrafi go stosować w rozwiązaniach prostych zadań; – wie, jakie zdarzenia nazywamy niezależnymi; potrafi zbadać, posługując się definicją, czy dwa zdarzenia są niezależne; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące niezależności zdarzeń.		

Przykładowe zadania		
<u>Zadanie 1.</u> a) Ile jest liczb sześciocyfrowych, w których suma cyfr jest równa 4? b) Ile różnych kodów można otrzymać, przestawiając litery wyrazu KATASTROFA. <u>Zadanie 2.</u> Z grupy 6 kobiet i 8 mężczyzn wybieramy losowo cztery osoby. Ile jest takich sposobów wyboru, aby wśród wybranych osób: a) były same kobiety, b) były dwie kobiety i dwóch mężczyzn? <u>Zadanie 3.</u> Sześcian pomalowano, a następnie rozcięto na 1000 jednakowych sześcianików, które wrzucono do pudełka i wymieszano. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania z tego pudełka jednego sześcianika, który: a) będzie miał dwie ściany pomalowane, b) będzie miał jedną ścianę lub dwie ściany pomalowane. <u>Zadanie 4.</u> Na stu mężczyzn – pięciu, a na tysiąc kobiet – dwie, to daltoniści. Z grupy, w której stosunek liczby kobiet do liczby mężczyzn wynosi 3 : 7,	<u>Zadanie 1.</u> W przedziale wagonu kolejowego są ustawione naprzeciw siebie dwie ławki. Każda ma 5 numerowanych miejsc. Do przedziału weszło pięć osób. Trzy osoby siadły na jednej ławce, pozostałe – na drugiej, naprzeciwko dwóch osób z pierwszej ławki. Ile jest takich rozmieszczeń osób w przedziale? <u>Zadanie 2.</u> Ile jest funkcji ściśle monotonicznych przekształcających zbiór k – elementowy w zbiór n – elementowy ($k \le n$)? <u>Zadanie 3.</u> Wykaż, że jeśli $P(A) = 0{,}25$ i $P(B) = \frac{1}{3}$, to $\frac{1}{3} \le P(A \cup B) \le \frac{7}{12}$ oraz $P(A \cap B) \le \frac{1}{4}$. <u>Zadanie 4.</u> Ze zbioru liczb {1, 2, 3, 4, …, 18, 19, 20} losujemy trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma tych liczb jest podzielna przez 3, jeśli wiadomo, że co najmniej jedna z tych liczb przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.	<u>Zadanie 1.</u> Ile rozwiązań ma równanie $x + y + z + t = 25$ a) w zbiorze liczb naturalnych dodatnich; b) w zbiorze liczb naturalnych?

wylosowano jedna osobę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to daltonista? Zadanie 5. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Czy niezależne są następujące zdarzenia: *A* – na obu kostkach wypadła nieparzysta liczba oczek, *B* – na drugiej kostce wypadła liczba oczek podzielna przez trzy?	Zadanie 5. Do sklepu dostarczają żarówki energooszczędne dwa zakłady, będące częściami tej samej firmy, przy czym pierwszy z nich dostarcza trzy razy więcej żarówek niż drugi. W pierwszym z tych zakładów mają wady średnio 3 żarówki na 1000 wyprodukowanych, a w drugim 7 na 1000 wyprodukowanych. Klient kupił żarówkę, na której widniał tylko znak firmy, a nie zakładu, który ją wyprodukował. Żarówka ta w okresie gwarancji zepsuła się. Do którego zakładu sklep raczej powinien się zwrócić z reklamacją?	

22. Elementy statystyki opisowej.

Tematyka zajęć:

- Podstawowe pojęcia statystyki. Sposoby prezentowania danych zebranych w wyniku obserwacji statystycznej
- Średnia z próby
- Mediana z próby i moda z próby
- Wariancja i odchylenie standardowe

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna podstawowe pojęcia statystyki opisowej: obserwacja statystyczna, populacja generalna, próba, liczebność próby, cecha statystyczna (mierzalna, niemierzalna) itp.; – potrafi odczytywać dane statystyczne z tabel, diagramów i wykresów oraz interpretować te dane; – potrafi określać zależności między odczytanymi danymi; – potrafi przedstawiać dane empiryczne w postaci tabel, diagramów i wykresów; – potrafi obliczać średnią arytmetyczną, średnią ważoną, medianę i odchylenie standardowe z próby; – potrafi interpretować wymienione wyżej parametry statystyczne.	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania ze statystyki opisowej o średnim stopniu trudności.	

Przykładowe zadania

Zadanie 1.
Pięćdziesiąt osób zdawało egzamin z przepisów ruchu drogowego. Liczba popełnionych przez nie błędów przedstawiona jest w poniższej tabeli:

Liczba błędów	0	1	2	3	4	5
Liczba osób	11	8	14	7	6	4

a) Oblicz średnią liczbę błędów popełnionych przez zdającego.
b) Ile procent zdających zdało egzamin, jeśli można było popełnić co najwyżej dwa błędy?
c) Przedstaw dane na diagramie kolumnowym i zaznacz na nim średnią obliczoną w punkcie a).

Zadanie 2.
Wyznacz modę i medianę zestawu danych:
3, 2, 2, 5, 4, 5, 1, 2, 6, 8.

Zadanie 3.
Producent czekolady deklaruje, że tabliczka ma wagę 150 g $\pm$ 2 g. Dla zbadania jakości pewnej partii czekolady organizacja konsumencka zbadała wagę losowo wybranych 10 tabliczek czekolady z tej partii i otrzymała następującą ich wagę (w gramach):
150,4 148,9 150,1 152,8 146,6 154,3 150,8 151,1 150,6 149,5

Zadanie 1.
W klasie IIIa liczącej 28 osób z ostatniego sprawdzianu z matematyki było 13 ocen dopuszczających, a pozostałe oceny to dostateczne i dobre. Średnia ocen ze sprawdzianu wyniosła 2,75. Oblicz:

a) liczbę ocen dobrych i dostatecznych ze sprawdzianu;
b) odchylenie standardowe od średniej ocen; wynik podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

Zadanie 2.
Wiadomo, że wariancję zestawu danych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ możemy obliczyć ze wzoru:

(1) $$\sigma^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \ldots + (x_n-\bar{x})^2}{n}$$

lub ze wzoru

(2) $$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2,$$

gdzie $\bar{x}$ jest średnią arytmetyczną liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Wykaż, że wzory (1) i (2) są równoważne.

Oblicz średnią wagę tabliczki czekolady i odchylenie standardowe w badanej próbie. Zastanów się, czy organizacja konsumencka powinna zwrócić się do producenta z reklamacją dotyczącą tej partii tabliczek czekolady.		

23. Geometria przestrzenna

Tematyka zajęć:

- Płaszczyzny i proste w przestrzeni
- Rzut równoległy na płaszczyznę. Rysowanie figur płaskich w rzucie równoległym na płaszczyznę
- Prostopadłość prostych i płaszczyzn w przestrzeni
- Rzut prostokątny na płaszczyznę
- Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych
- Kąt między prostą a płaszczyzną. Kąt dwuścienny
- Graniastosłupy
- Ostrosłupy
- Siatka wielościanu. Pole powierzchni wielościanu
- Objętość figury przestrzennej. Objętość wielościanów
- Przekroje wielościanów. Konstrukcje
- Przekroje wielościanów – zadania
- Bryły obrotowe. Pole powierzchni brył obrotowych
- Objętość brył obrotowych
- Zastosowanie analizy matematycznej w rozwiązywaniu zadań z geometrii przestrzennej

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi określić położenie dwóch płaszczyzn w przestrzeni; – potrafi określić położenie prostej i płaszczyzny w przestrzeni; – potrafi określić położenie dwóch prostych w przestrzeni; – rysuje figury płaskie w rzucie równoległym na płaszczyznę; – umie scharakteryzować prostopadłość prostej	Uczeń: – potrafi wyznaczać przekroje wielościanów; – określa, jaką figurą jest dany przekrój sfery płaszczyzną; – potrafi obliczyć pole powierzchni przekroju bryły daną płaszczyzną (graniastosłupa, ostrosłupa, walca, stożka, kuli); – potrafi rozwiązywać zadania, w których jedna bryła jest wpisana w drugą lub opisana na niej (ostrosłup wpisany w kulę; kula wpisana	Uczeń: – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania geometryczne dotyczące brył, z wykorzystaniem poznanych twierdzeń.

i płaszczyzny; – umie scharakteryzować prostopadłość dwóch płaszczyzn; – rozumie pojęcie odległości punktu od płaszczyzny oraz odległości prostej równoległej do płaszczyzny od tej płaszczyzny; – zna i potrafi stosować twierdzenie o trzech prostych prostopadłych; – rozumie pojęcie kąta miedzy prostą i płaszczyzną; – rozumie pojęcie kąta dwuściennego, poprawnie posługuje się terminem “kąt liniowy kąta dwuściennego”; – zna określenie graniastosłupa; umie wskazać: podstawy, ściany boczne, krawędzie podstaw, krawędzie boczne, wysokość graniastosłupa; – zna podział graniastosłupów; – umie narysować siatki graniastosłupów prostych; – zna określenie ostrosłupa; umie wskazać: podstawę, ściany boczne, krawędzie podstaw, krawędzie boczne, wysokość ostrosłupa; – zna podział ostrosłupów; – umie narysować siatki ostrosłupów prostych; – potrafi rozpoznać w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi itp.) oraz obliczyć miary tych kątów; – potrafi rozpoznać w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami i płaszczyznami (kąty między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami) oraz obliczyć	w stożek, ostrosłup opisany na kuli, walec wpisany w stożek itp.); – potrafi stosować twierdzenie o objętości brył podobnych w rozwiązaniach prostych zadań; – potrafi rozwiązywać zadania geometryczne dotyczące brył o średnim stopniu trudności, z wykorzystaniem wcześniej poznanych twierdzeń z planimetrii oraz trygonometrii; – wykorzystuje wiadomości z analizy matematycznej w rozwiązaniach zadań ze stereometrii.	

miary tych kątów; – potrafi rozpoznać w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między ścianami oraz obliczyć miarę tego kąta; – zna określenie walca; umie wskazać: podstawy, powierzchnię boczną, tworzącą, oś obrotu walca; – rozumie określenie “przekrój osiowy walca”; – zna określenie stożka; umie wskazać: podstawę, powierzchnię boczną, tworzącą, wysokość, oś obrotu stożka; – rozpoznaje w walcach i stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą) oraz oblicza miary tych kątów; – zna określenie kuli; – rozumie pojęcie objętości bryły; – umie obliczyć objętość i pole powierzchni poznanych graniastosłupów; – umie obliczyć objętość i pole powierzchni poznanych ostrosłupów; – umie obliczyć objętość i pole powierzchni brył obrotowych (stożka, kuli, walca); – potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące brył, w tym z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych wcześniej twierdzeń z geometrii płaskiej.		

Przykładowe zadania

Zadanie 1.	Zadanie 1.	Zadanie 1.

Przez punkty *A*, *B* leżące poza płaszczyzną π, poprowadzono proste prostopadłe do tej płaszczyzny przebijające ją odpowiednio w punktach *A′* i *B′*. Wiedząc, że $\lvert AA'\rvert = 80$ cm, $\lvert BB'\rvert = 60$ cm, oblicz odległość środka odcinka *AB* od płaszczyzny π. <u>Zadanie 2.</u> Podstawą graniastosłupa prostego jest równoległobok, którego pole wynosi 16 cm^2, a kąt ostry ma miarę $\frac{\pi}{6}$. Pola ścian bocznych tego graniastosłupa są równe odpowiednio 24 cm^2 i 48 cm^2. Oblicz objętość graniastosłupa. <u>Zadanie 3.</u> Wysokość czworościanu foremnego ma długość *H*. Oblicz długość krawędzi tego czworościanu. <u>Zadanie 4.</u> Trapez prostokątny obraca się wokół boku tworzącego z podstawami kąty proste. Podstawy trapezu mają długość odpowiednio 10 cm i 7 cm. Pole trapezu wynosi 68 cm^2. Oblicz objętość otrzymanej bryły obrotowej.	Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o polu równym 1 m^2. Dwie ściany boczne są prostopadłe do płaszczyzny podstawy, a dwie pozostałe tworzą z nią kąty o miarach odpowiednio 30° i 60°. Oblicz objętość ostrosłupa. <u>Zadanie 2.</u> Długość krawędzi sześcianu jest równa 10 cm. Sześcian ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz pole otrzymanego przekroju. <u>Zadanie 3.</u> W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym kąt płaski przy wierzchołku ściany bocznej ma miarę α, zaś kąt dwuścienny między sąsiednimi ścianami bocznymi ma miarę β. Wykaż, że $\cos\beta = \frac{\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. <u>Zadanie 4.</u> Na kuli o promieniu *R* opisano stożek obrotowy o najmniejszej objętości. Oblicz stosunek objętości tego stożka do objętości kuli.	Przez końce trzech krawędzi równoległościanu schodzących się w jednym wierzchołku poprowadzono płaszczyznę. Udowodnij, że dzieli ona w stosunku 1 : 2 przekątną równoległościanu wychodzącą z tego samego wierzchołka.